Guía Práctica de Matemáticas VII
Primera Parte

Samuel Alonso
GECOUSB
14-10028@usb.ve

Caracas, mayo de 2018

Prólogo

El curso de Matemáticas VII, tal y como se imparte en la Universidad Simón Bolívar, es un curso que requiere de una preparación mental previa adicional, en comparación a los cursos anteriores. Después de Matemáticas II, IV, V y VI, está bien fundada en el estudiante la concepción clásica del cálculo diferencial. Estos, al verse sucesivamente, dan la impresión de complementarse el uno al otro, como ríos distintos que eventualmente juntan su cauce. Y aunque esta perspectiva es de alguna forma cierta, puede fácilmente resultarle engañosa el nuevo estudiante de Matemáticas VII: su paradigma y los nuevos objetos matemáticos en ella definidos precisan de una visión un tanto más abierta, aunque no necesariamente más abstracta que la de Matemáticas III. Pero ahora la idea principal no es *complementar*, sino *construir*, con las herramientas a mano, un nuevo puñado de conceptos matemáticos que incrementen sustancialmente nuestro poder de cálculo.

En esencia, Matemáticas VII es un curso sobre *integración*, y sus piedras angulares son la Delta de Dirac, ahora como un objeto de carácter algebraico, la derivada generalizada, y las autofunciones. En este sentido, si se dedica el tiempo necesario a comprender estos conceptos, el grueso de Matemáticas VII se torna algo bastante sencillo, y en ocasiones hasta natural. Debo hacer un énfasis nuevamente en la importancia de entenderlos, por miedo a no ser lo suficientemente claro: a lo largo de Matemáticas VII, estos conceptos deberán convertirse en segunda naturaleza para el lector; algo tan elemental como la pendiente de una recta, el teorema de Pitágoras, o un producto notable. Logrado esto, más allá de gozar de una buena posibilidad de obtener la nota máxima, se habrán consolidado las ideas fundamentales del curso, y con ellas, el gran poder de cálculo que estas envisten.

La presente guía apunta a servir como recurso para justamente eso: la consolidación de ideas fundamentales, así como un paseo de la mano por los detalles importantes de la teoría, ejercicios de variada dificultad y problemas reales en los cuales Matemáticas VII reluce por su elegancia y sencillez al momento de resolver. Aunque ciertamente no pretende ser una inmensa colección de problemas propuestos, se han incluido en la guía suficientes problemas, muchos originales y algunos de fuentes diversas, como para hacer de su resolución un objetivo tanto factible dentro del tiempo de estudio disponible en el trimestre como gratificante en el ámbito académico.

Finalmente, debo un agradecimiento a Manuel Morgado y al profesor Mario Caicedo, por sus interesantes conversaciones sobre el tema, y a mis compañeros de GECOUSB por inspirarme a llevar a cabo la ardua labor de recopilar, organizar y resolver el contenido de la presente guía. Espero le sirva este humilde trabajo.

En memoria de Stephen Andrea.

Samuel Alonso
Maracay, abril de 2018

Cómo Usar la Guía

A lo largo de la guía, los problemas propuestos se encuentran organizados de dos maneras: por *tema* y *dificultad*. Cada enunciado es precedido por una etiqueta y el número de problema correspondiente a su tema. Las etiquetas dan una idea de la complejidad del problema:

- **T** de *trivial*; un ejercicio sólo para entrar en calor.
- **S** de *simple*; algo sencillo pero que requiere de más trabajo.
- **D** de *difícil*; un reto al lector, aunque no necesariamente algo pertinente a un parcial.
- **E** de *especial*; una aplicación interesante del contenido o un esfuerzo adicional por entender la teoría.

Los ejercicios de la guía han sido seleccionados de forma tal que le ahorren cálculos redundantes. Si en algún punto siente que el cálculo se vuelve extremadamente laborioso, seguramente ya habrá resuelto algo muy similar en ejercicios anteriores; la lista ha sido diseñada particularmente para que esto sea posible. En este sentido, es muy recomendable que no se salte ejercicios y que no esquive las demostraciones, de haberlas, sino que haga de la resolución de esta guía un proceso secuencial. De igual manera, encontrará la solución a cada ejercicio en la sección final. Asimismo, le invito a no evitar los ejercicios especiales, pues estarán completamente dentro de su alcance de haber resuelto los ejercicios anteriores. Como nota adicional, siéntase en la libertad de citar cualquier fórmula o teorema que requiera para la solución de los problemas, siempre y cuando no vaya en contra del propósito del ejercicio.

Como convenciones en la notación, a menos que se indique lo contrario, D denotará derivación siempre y cuando no sea ambiguo respecto a otras variables o parámetros; para los casos en que sea ambiguo, el subíndice indicará la variable con respecto a la cual sucede la derivación. α, β, γ y λ usualmente denotarán parámetros, mientras que u, v, μ, x, z, s usualmente denotarán variables. Un recordatorio útil es que $f(x)$ denota el valor de alguna función f evaluada en x, mientras que f hace referencia a la función en sí como objeto matemático. Al definir operadores diferenciales, el símbolo 1 se entenderá como el elemento identidad del espacio pertinente. Si f es alguna función, $\mathcal{L}(f)$ denotará su transformada de Laplace.

Finalmente, cualquier información sobre errores de redacción o en la solución de alguno de los problemas será bien recibida y puede enviarla al correo del autor o al de GECOUSB [1].

[1] 14-10028@usb.ve, gecousb@gmail.com

Para Isabel, como símbolo de gratitud
por su inagotable paciencia,

César, por su incondicional apoyo,

y Gabriel, por su alegría y perseverancia;

a ustedes dedico este trabajo.

Lista de Problemas

Derivada Generalizada

T.1.

Evalúe, empleando la derivada generalizada, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1; \\ x-1, & 1 \leq x < 2; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{2}$$

T.2.

De forma similar, evalúe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx, \quad \omega \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x < -1/2; \\ 1, & 1/2 \leq x < 1; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{4}$$

T.3.

Halle el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx \tag{5}$$

como función de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x < 0; \\ x-1, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{6}$$

S.1.

Calcule el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx-\lambda t)\,dx, \quad k > 0 \tag{7}$$

como función de $\lambda \in \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2\pi/k; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{8}$$

S.2.A.

Muestre que $x^2\delta'(x) = 0$ en el sentido de distribuciones.

S.2.B.

Análogamente, muestre que $x^3\delta''(x) = 0$.

S.2.C.

Finalmente, muestre que $x^k\delta^{(n)}(x) = 0$ si $k > n$. Considere el caso $k = n$ y exprese la distribución resultante en términos de δ.

S.3.A.

Considere a $H(kx)$, donde H es la función de Heaviside. Empleando la definición de la derivada generalizada, muestre que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x). \tag{9}$$

(Sugerencia: analice los casos $k > 0$ y $k < 0$ por separado). Muestre además que ambas funciones generalizadas son iguales en el sentido de distribuciones.

S.3.B.

De forma similar, muestre que

$$\delta'(kx) = \pm\frac{1}{k^2}\delta'(x), \quad \text{según} \quad k \gtrless 0. \tag{10}$$

S.4.A.

Considere la distribución $\delta(x)$, y definamos $\gamma(x) = \delta(-x)$. Muestre que

$$\gamma(x) = \delta(x) \tag{11}$$

en el sentido de distribuciones. ¿Se sigue entonces que $\delta(x) = \delta(-x)$?

S.4.B.

Ahora, definamos $\beta(x) = \delta'(-x)$. De forma análoga, muestre que

$$\beta(x) = -\delta'(x). \tag{12}$$

¿Se sigue entonces que $\delta'(-x) = -\delta'(x)$?

S.5.A.

Sea $u(t) = H(t)t$. Calcule $u'_{gen}(t)$.

S.5.B.

Sea $u(t) = H(t)e^{-\lambda t}$. Muestre que $u'_{gen}(t) + \lambda u(t) = \delta(t)$.

S.5.C.

Sea $g(t) = H(t)\sin(kt)$. Halle $g''_{gen}(t)$ y muestre que

$$g''_{gen}(t) + k^2 g(t) = k\delta(t). \tag{13}$$

S.5.D.

Sea $f(t) = H(t)\cos(kt)$. Muestre, de forma similar, que

$$f''_{gen}(t) + k^2 f(t) = \delta'(t). \tag{14}$$

Lleve a cabo un cálculo similar para $y(t) = H(t)\sinh(kt)$ y $q(t) = H(t)\cosh(kt)$.

D.1.

Halle el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x)\, dx, \tag{15}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & -2\alpha \leq x \leq 2\alpha; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

D.2.

Efectúe la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} f(x)\, dx, \tag{17}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x + \lambda, & x \geq 0; \\ x, & x < 0. \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

D.3.

Calcule la integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kx} x^3\, dx, \quad k > 0. \tag{19}$$

D.4.

Evalúe la integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{20}$$

para s entero estrictamente positivo. Ésta integral, cuando se considera como función del parámetro s, es conocida como la función Gamma de Euler $\Gamma(s)$.

E.1.

La Ley de Stefan-Boltzmann establece que la potencia disipada por unidad de área de un cuerpo negro a temperatura T es proporcional a la cuarta potencia de T. Esta ley puede obtenerse directamente de la Ley de Planck efectuando la integral

$$I = \frac{2\pi h}{c^2} \int_{0}^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu. \tag{21}$$

Mediante la sustitución

$$\beta = \frac{h\nu}{kT}, \quad d\beta = \frac{h}{kT} d\nu, \tag{22}$$

la integral se reduce a

$$I = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_{0}^{\infty} \beta^3 \frac{1}{e^{\beta} - 1}\, d\beta. \tag{23}$$

Efectúe esta integral y verifique el valor de la constante de la Ley de Stefan-Boltzmann (pista: reescriba la fracción en términos de $e^{-\beta}$ y reconozca una serie geométrica. Cite la suma resultante).

Convolución

T.1.A.

Sea $H(t)$ la función de Heaviside. Halle la convolución $(H * H)(t)$

T.1.B.

Sea $f(t) = H(t)t$. Halle $(H * f)(t)$.

T.2.A.

Sea $u(t) = H(t)t^2$. Halle $(H * u)(t)$.

T.2.B.

Sea $g(t) = H(t)t$. Calcule $(g * g)(t)$. ¿Coincide este resultado con el de la convolución anterior?

S.1.

Sean $f(t) = H(t)t^n$ y $g(t) = H(t)t^k$, con $n, k \in \mathbb{N}$. Evalúe $(f * g)(t)$ **sin usar** la definición.

S.2.

Sea L el operador diferencial

$$L = D^2 + \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Halle el propagador causal de L.

S.3.

Definamos $f_\alpha(x) = H(x)e^{\alpha x}$. Evalúe la convolución $(f_k * f_\omega)(t)$.

S.4.A.

Considere la función $u(x) = xH(x)$. Halle $u'_{gen}(x)$ y calcule $(H * u'_{gen})(x)$.

S.4.B.

¿Es cierto que para una función causal u arbitraria $H * u'_{gen} = u$? Pruébelo.

S.5.A.

Muestre que $(f(x-a) * g(x))(t) = (f * g)(t-a)$.

S.5.B.

Sea $y(t) = H(t) - H(t-1)$. Calcule $(y * y * y)(t)$.

S.6.

Sea u tal que

$$u'_{gen}(x) = xH(x) - 3x^2 H(x-1). \tag{25}$$

Halle $u(x)$.

S.7.

Halle u causal que satisfaga

$$(H * u)(t) + u(t) = H(t). \tag{26}$$

S.8.A.

Sean $f_k(t) = H(t)\sin(kt)$. Halle la convolución $(f_k * f_\omega)(t)$, donde $k, \omega \in \mathbb{R}$.

S.8.B.

Sea $u_k(t) = H(t)\cos(kt)$. Halle $(f_k * u_\omega)(t)$ **sin** usar la definición.

S.8.C.

De forma similar, halle $(u_k * u_\omega)(t)$ **sin** usar la definición.

D.1.A.

Sea

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n H(x - \pi n). \tag{27}$$

Sea además $g(x) = H(x) \sin x$. Halle la convolución $(f * g)(x)$.

D.1.B.

Grafique $(f * g)(x)$ para $N = 3$.

D.1.C.

Tomemos ahora $v(x) = H(x) \cos x$. Halle $(f * v)(x)$. Esto no debería tomarle más de tres líneas.

D.2.A.

Sea L el operador diferencial dado por

$$L = D^2 + \lambda D + \eta, \quad \lambda,\, \eta \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Halle el propagador causal de L.

D.2.B.

Use el resultado anterior para resolver el problema a valores iniciales

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 2 \cos x, \tag{29}$$

con $f(0) = 0,\ f'(0) = 1/2$.

Transformada de Laplace

T.1.

Use la definición de la Transformada de Laplace para hallar $\mathcal{L}(\delta)(z)$.

T.2.

De forma similar, use la definición para hallar $\mathcal{L}(H)(z)$, donde $H(t)$ es la función de Heaviside.

S.1.

Halle $\mathcal{L}(t^n H(t))(z)$, $n \in \mathbb{N}$. Use este resultado para mostrar que

$$\mathcal{L}\left(H(t)e^{\alpha t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

S.2.A.

Sea $f(t) = H(t)\sin(\omega t)$. Halle $\mathcal{L}(f)(z)$.

S.2.B.

Reemplace el seno por coseno y repita el cálculo.

S.3.A.

Sea u una función causal y de crecimiento exponencial. Si $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$, muestre que $\mathcal{L}\left(u'_{gen}\right)(z) = zU(z)$.

S.3.B.

Muestre también que $\mathcal{L}(t\,u(t))(z) = -U'(z)$, y por tanto que $\mathcal{L}(t^n\,u(t))(z) = (-1)^n U(z)$, provisto que esta transformada exista.

S.4.A.

Muestre que $\mathcal{L}\left(u(t-t_0)\right)(z) = U(z)e^{-zt_0}$. Muestre que $\mathcal{L}\left(u(t)e^{\alpha t}\right)(z) = U(z-\alpha)$.

S.4.B.

Sea g causal y de crecimiento exponencial. Si $G(z) = \mathcal{L}(g)(z)$ y $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$, muestre que $\mathcal{L}(u * g)(z) = U(z)G(z)$.

S.5.

Sean $f(t) = H(t)\sinh\omega t$ y $u(t) = H(t)\cosh\omega t$, con $\omega > 0$. Halle $\mathcal{L}(f)(z)$ y $\mathcal{L}(u)(z)$.

S.6.

Use el resultado de (30) para hallar $u(t)$, donde

$$u'_{gen}(t) = \delta'(t) - 2H(t-2). \tag{31}$$

S.7.A.

La transformada de Laplace de $e^{t^2/2}$ no existe debido a que esta función crece muy fuertemente. Sin embargo, considere la función $\phi(t) = e^{-t^2/2}$. Esta función satisface $t\phi(t) + \phi'_{gen}(t) = 0$. Con esta información, y las propiedades de la transformada de Laplace, muestre que $\mathcal{L}(\phi)(z) \propto e^{z^2/2}$.

S.7.B.

Use la *definición* de la transformada de Laplace Bilateral para observar que dicha constante de proporcionalidad es en realidad una integral que parece depender de z. De argumentos para mostrar que dicha integral realmente no depende de z, y pruébelo. Consulte el valor de dicha integral, o calcúlelo usted mismo. Finalmente, diga $\mathcal{L}\left(e^{-t^2/2}\right)(z)$.

S.7.C.

En internet puede encontrarse que $\mathcal{L}\left(e^{-t^2/2}\right)(z) \propto e^{z^2/2}\mathrm{erfc}\left(z/\sqrt{2}\right)$, donde $\mathrm{erfc}(x)$ es la función de error complementaria. ¿Hay algún error en nuestros cálculos? Investigue y explique la diferencia.

S.8.

Calcule la integral

$$\int_0^\infty e^{-kt}\sin nt\,dt, \tag{32}$$

donde k, $n \in \mathbb{R}$.

S.9.

De forma similar, calcule

$$\int_0^\infty e^{-t}t^2\cos^2 nt\,dt, \tag{33}$$

con $n \in \mathbb{R}$

S.10.

Use las propiedades de la Delta de Dirac para hallar

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{3}\delta'(3x-2)\right)(z). \tag{34}$$

S.11.

Halle la siguiente transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left(H(x-\mu)e^{-i\nu x}\right)(z) \tag{35}$$

Sugerencia: si le confunde la prioridad de las propiedades, emplee la definición.

D.1.

Efectúe la integral

$$\int_\lambda^\infty e^{-3t}\sin^3 kt\,dt, \quad 0<\lambda<\infty, \quad k\in\mathbb{R}. \tag{36}$$

D.2.

Sea

$$f(t) = H(t)\frac{1}{1+e^{-t}}, \tag{37}$$

halle $\mathcal{L}(f)(z)$.

D.3.

Halle la transformada de Laplace de

$$f(t) = H(t)\frac{\sin kt}{kt}, \quad k > 0. \tag{38}$$

Sugerencia: usted no conoce

$$\mathcal{L}\left(H(t)\frac{\sin kt}{kt}\right)(z), \tag{39}$$

pero si conoce $\mathcal{L}\left(H(t)\sin kt\right)(z)$.

D.4.A.

En Ingeniería Eléctrica, las funciones de Bessel son ampliamente utilizadas. En particular, la función de Bessel de orden cero $\mathcal{J}_0$ satisface la ecuación diferencial

$$t^2\mathcal{J}_0'' + t\mathcal{J}_0' + t^2\mathcal{J}_0 = 0, \qquad \mathcal{J}_0(0) = 1, \qquad \mathcal{J}_0'(0) = 0. \tag{40}$$

Reescriba la ecuación diferencial en términos de $u(t) = H(t)\mathcal{J}_0(t)$ y halle $\mathcal{L}(u)(z)$, suponiendo que $\mathcal{L}(u)(0) = 1$, $\mathcal{L}(u)'(0) = 0$.

D.4.B.

Empleando el resultado anterior, muestre que

$$\sin t = \int_0^t \mathcal{J}_0(s)\mathcal{J}_0(t-s)\,ds, \quad t \geq 0. \tag{41}$$

E.1.A.

En Mecánica Cuántica es bien conocido el Principio de Incertidumbre. Este principio establece que no pueden determinarse con infinita precisión la posición y el moméntum de una partícula de forma simultánea. En realidad, este no es ningún principio intrínsecamente cuántico; es solo una consecuencia de la naturaleza ondulatoria de la dinámica del sistema. Para ilustrar esto, considere una onda plana limitada a una región de ancho $2L$ dada por

$$u(x) = \left[H(x+L) - H(x-L)\right]e^{ikx}, \quad \text{con} \quad k = \frac{\pi}{L}. \tag{42}$$

Halle la transformada de Laplace de u.

E.1.B.

Ahora, tome $z = i\omega$. Es decir, considere la transformada sólo sobre el eje imaginario. A este caso límite de la Transformada de Laplace se le conoce como Transformada de Fourier. Muestre que cuando $z = i\omega$,

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(i\omega\right) = \frac{2L\sin(\sigma L)}{\sigma L}, \quad \sigma = \omega - \frac{\pi}{L}. \tag{43}$$

E.1.C.

Grafique $\mathcal{L}\left(u\right)\left(i\omega\right)$ como función de ω para varios L. Observe que esta gráfica tiene un máximo en π/L, y que *mientras más grande es L más delgado se vuelve el pico*. Note entonces que **no** puede obtener una señal concentrada en x y una señal concentrada en ω al mismo tiempo. Este es un ejemplo simple del Principio de Incertidumbre. Más allá de sus implicaciones en la Mecánica Cuántica, los ingenieros electrónicos lidiarán con este fenómeno al filtrar señales muy breves en el tiempo, y los ingenieros eléctricos al diseñar sistemas de radar.

E.2.A.

A continuación trataremos de seguir paso a paso una cuenta importante de la guía de S. Andrea. Considere una función $R(z)$, que es la transformada de Laplace de otra cierta función causal $r(t)$. Supongamos adicionalmente que $R(z)$ es una función racional de la forma

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^m}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_l z^l}. \tag{44}$$

El Teorema de Descomposición en Funciones Racionales (la base del método de fracciones simples) indica que esta función racional puede escribirse como

$$R(z) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k z^k + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{c_{1k}}{(z-\alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{c_{2k}}{(z-\alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_{pk}}{(z-\alpha_p)^k}, \tag{45}$$

con $N_1 + N_2 + \cdots + N_p = l$. Denominemos al j-ésimo sumando por

$$R_j(z) = \sum_{k=1}^{N_j} \frac{c_{jk}}{(z-\alpha_j)^k}, \tag{46}$$

Ahora trataremos de reconstruir a $r(t)$ sumando por sumando. Piense que esta $R_j(z)$ es la transformada de Laplace de un cierto $r_j(t)$ causal, de manera que

$$\mathcal{L}\left(r_j(t)\right)(z) = R_j(z). \tag{47}$$

Utilice los resultados de S.1 para mostrar que

$$r_j(t) = H(t) \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk} e^{\alpha_j t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{48}$$

E.2.B.

Ahora intentaremos reescribir la suma anterior. De Matemáticas IV, es conocido que la serie de Taylor alrededor de $z = 0$ de e^{tz} es

$$e^{tz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!}. \tag{49}$$

Por tanto, la serie de Laurent alrededor de $z = 0$ de e^{tz}/z^k resulta

$$\frac{e^{tz}}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^{n-k}}{n!}. \tag{50}$$

Reescriba la expresión

$$\frac{e^{tz}}{(z - \alpha_j)^k} \tag{51}$$

en términos de una serie de Laurent similar a (50), y muestre que

$$e^{\alpha_j t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{tz}}{(z - \alpha_j)^k};\ \alpha_j \right). \tag{52}$$

E.2.C.

Use las propiedades del residuo para mostrar que $r_j(t) = H(t)\operatorname{Res}\left(e^{tz} R_j(z);\ \alpha_j\right)$. Finalmente, y como $\operatorname{Res}\left(e^{tz} R_j(z);\ \alpha_i\right) = 0$ para $i \neq j$, concluya que

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k \delta^{(k)}(t) + H(t) \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(e^{tz} R(z);\ \alpha_j \right). \tag{53}$$

Transformada Inversa de Laplace

S.1.A.

Considere la función

$$U(z) = \frac{z^3 + 2z - 1}{z^2 + 1}. \tag{54}$$

Verifique que si $u(t) = \delta'(t) + H(t)\cos t - H(t)\sin t$, entonces $\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) = U(z)$.

S.1.B.

Use el método de los residuos para hallar $u(t)$ mediante

$$u(t) = H(t) \sum_{\alpha\in\mathbb{C}} \operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ \alpha\right). \tag{55}$$

S.1.C.

Si en principio el método funciona para cualquier función racional, piense y explique por qué este resultado y el anterior no coinciden (si hizo el ejercicio E.2 de la sección anterior, ya se respondió en el procedimiento).

S.2.

Considere la función Zeta de Riemann,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \Re(z) > 1. \tag{56}$$

Halle ξ tal que $\mathcal{L}\left(\xi\right)\left(z\right) = \zeta(z)$.

S.3.

Sea g una función causal que satisface

$$g''_{gen}(t) = \delta(t) + H(t). \tag{57}$$

Halle $g(t)$.

S.4.

Resuelva el problema de valores iniciales

$$k^2 y''(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{2}{k^2}. \tag{58}$$

S.5.

Halle y causal que satisfaga

$$xy' + y = x \sin x, \quad y(0) = 0. \tag{59}$$

S.6.

Halle una función u tal que

$$u''_{gen}(t) = H(t-\pi) + 2\delta''(t) + 4\delta'(2-t). \tag{60}$$

S.7.

Sea f una función causal que satisface

$$f''_{gen}(t) = H(t)te^{-2t} + H(t)t^2 e^{-4t} + \delta(t). \tag{61}$$

Halle $f(t)$.

S.8.

Halle una función generalizada u tal que

$$u(t+\alpha) + u(t) = \delta(t+\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{62}$$

S.9.

Halle la convolución de la función Heaviside consigo misma n veces. Es decir, $(H * H * \ldots * H)(t)$, donde la cantidad de convoluciones es n.

S.10.A.

Sea u una función causal dada, y g una función causal arbitraria. Halle g tal que

$$(g * u)(t) + \lambda u(t) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{63}$$

S.10.B.

Halle g tal que

$$(g * u)(t) + \lambda u(t) = \beta g(t), \quad u(t) = H(t)\sin(t), \tag{64}$$

donde λ, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

S.11.

Halle una función u causal que satisfaga

$$\mathcal{L}(u)(z) = \frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}. \tag{65}$$

S.12.

Resuelva el problema a valores iniciales

$$y'''(t) + y(t) = t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \tag{66}$$

utilizando la transformada de Laplace.

D.1.

Resuelva la ecuación diferencial

$$ty'''(t) + 3y''(t) - ty(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y''(0) = 0. \tag{67}$$

D.2.

Halle y causal que satisfaga

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = e^{-t}\sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{68}$$

D.3.

Sea L un operador diferencial tal que

$$L = D^3 - 2D^2 - D + 2. \tag{69}$$

Halle el propagador causal de L.

D.4.

Halle una función u que satisfaga

$$u'''_{gen}(t) + ku(t) = \delta^{(k)}(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \leq 5. \tag{70}$$

E.1.

Sea L_n el operador diferencial dado por $L_n = D^n + 1$, de forma que

$$L_n(f) = f^{(n)} + f, \tag{71}$$

para $f \in C^\infty$. Halle el propagador causal de L.

Soluciones

Derivada Generalizada

T.1.

Para evaluar la integral podemos aprovechar el carácter cíclico de las derivadas de $\cos x$. Primero, consideremos que la integral puede expresarse en términos de la aplicación de una función generalizada como

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle . \tag{72}$$

Pero como

$$\left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle = -\lambda^2 \left\langle f(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle , \tag{73}$$

entonces

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle = -\frac{1}{\lambda^2} \left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle . \tag{74}$$

Hallemos ahora $f''_{gen}(x)$. Derivando una primera vez obtenemos

$$f'_{gen}(x) = \delta(x) - \delta(x-2) + \begin{cases} -1, & 0 < x < 1; \\ 1, & 1 < x < 2; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{75}$$

Derivando nuevamente,

$$f''_{gen}(x) = \delta'(x) - \delta'(x-2) - \delta(x) + 2\delta(x-1) - \delta(x-2). \tag{76}$$

Entonces,

$$\left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle = -\lambda \sin 2\lambda + 2\cos\lambda - \cos 2\lambda - 1. \tag{77}$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \frac{\lambda \sin 2\lambda - 2\cos\lambda + \cos 2\lambda + 1}{\lambda^2}, \quad \lambda \neq 0. \tag{78}$$

Para halla el valor de la integral para $\lambda = 0$ basta con tomar el límite de la expresión cuando $\lambda \to 0$, o efectuar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \tag{79}$$

cuyo valor puede deducirse incluso gráficamente, y es 1.

T.2.

Se procede exactamente de la misma forma que en el ejercicio T.1, notando ahora que

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, \sin \omega x \right\rangle = -\frac{1}{\omega^2} \left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \sin \omega x \right\rangle . \tag{80}$$

Derivando una primera vez, tenemos

$$f'_{gen}(x) = -\delta\left(x + \frac{1}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{1}{2}\right) - \delta(x-1) + \begin{cases} 2, & -1 < x < -1/2; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{81}$$

Derivando de nuevo,

$$f''_{gen}(x) = -\delta'\left(x + \frac{1}{2}\right) + \delta'\left(x - \frac{1}{2}\right) - \delta'(x-1) + 2\delta(x+1) - 2\delta\left(x + \frac{1}{2}\right). \tag{82}$$

Por tanto

$$\left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \sin \omega x \right\rangle = \omega \cos \omega - 2 \sin \omega + 2 \sin \left(\frac{\omega}{2} \right). \tag{83}$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = \frac{-\omega \cos \omega + 2 \sin \omega - 2 \sin (\omega/2)}{\omega^2}, \quad \omega \neq 0, \tag{84}$$

con

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = 0, \quad \omega = 0. \tag{85}$$

T.3.

Se procede de la misma forma que en T.1 y T.2, usando las relaciones conocidas. Véase que

$$f'_{gen}(x) = -3\delta(x) + \begin{cases} 2, & -1 < x < 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{86}$$

Luego,

$$f''_{gen}(x) = -3\delta'(x) + 2\delta(x+1) - \delta(x) - \delta(x-1). \tag{87}$$

Por tanto,

$$\left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos \lambda x \right\rangle = -1 + \cos \lambda. \tag{88}$$

Finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2}, \quad \lambda \neq 0, \tag{89}$$

con

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 0. \tag{90}$$

S.1.

Siguiendo el mismo orden de ideas de los ejercicios T.1, T.2 y T.3, observando con cuidado que

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, \cos(kx - \lambda t) \right\rangle = -\frac{1}{k^2} \left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos(kx - \lambda t) \right\rangle. \tag{91}$$

La primera derivada generalizada de f resulta

$$f'_{gen}(x) = -\frac{2\pi}{k} \delta \left(x - \frac{2\pi}{k} \right) + \begin{cases} 1, & 0 < x < 2\pi/k; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{92}$$

Luego,

$$f''_{gen}(x) = -\frac{2\pi}{k} \delta' \left(x - \frac{2\pi}{k} \right) + \delta(x) - \delta \left(x - \frac{2\pi}{k} \right), \tag{93}$$

y entonces

$$\left\langle f''_{gen}(x) \,\middle|\, \cos(kx - \lambda t) \right\rangle = 2\pi \sin \lambda t. \tag{94}$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx - \lambda t) \, dx = -\frac{2\pi \sin \lambda t}{k^2}, \quad k > 0. \tag{95}$$

S.2.A.

Consideremos la acción de $x^2\delta'(x)$ sobre una función de prueba arbitraria $\phi \in C^\infty$. Vemos que, por las propiedades de las funciones generalizadas,

$$\left\langle x^2\delta'(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle = \left\langle \delta'(x) \,\middle|\, x^2\phi(x) \right\rangle. \tag{96}$$

Luego, aplicando las propiedades de la derivada generalizada,

$$\left\langle \delta'(x) \,\middle|\, x^2\phi(x) \right\rangle = -\left\langle \delta(x) \,\middle|\, 2x\phi(x) + x^2\phi'(x) \right\rangle = 0, \quad \forall \phi \in C^\infty. \tag{97}$$

Esto implica entonces que, en el sentido de distribuciones,

$$x^2\delta'(x) = 0. \tag{98}$$

S.2.B.

De forma similar,

$$\begin{aligned}
\left\langle x^3\delta''(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle &= \left\langle \delta''(x) \,\middle|\, x^3\phi(x) \right\rangle & (99)\\
&= -\left\langle \delta'(x) \,\middle|\, 3x^2\phi(x) + x^3\phi'(x) \right\rangle & (100)\\
&= \left\langle \delta(x) \,\middle|\, 6x\phi(x) + 6x^2\phi'(x) + x^3\phi''(x) \right\rangle = 0, & (101)
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in C^\infty$. El argumento es el mismo, y el resultado es que $x^3\delta''(x) = 0$, en el sentido de distribuciones.

S.2.C.

La idea es la siguiente: considere

$$\left\langle x^k\delta^{(n)}(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle = \left\langle \delta^{(n)}(x) \,\middle|\, x^k\phi(x) \right\rangle. \tag{102}$$

Mediante las propiedades de la derivada generalizada,

$$\left\langle \delta^{(n)}(x) \,\middle|\, x^k\phi(x) \right\rangle = (-1)^n \left\langle \delta(x) \,\middle|\, \frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi(x)\right) \right\rangle. \tag{103}$$

Pero, como $\left\langle \delta(x) \,\middle|\, x^s\psi(x) \right\rangle = 0$, $\forall \psi \in C^\infty$ y $s > 0$, entonces después de derivar n veces a $x^k\phi(x)$, al final todos los términos resultantes involucran el producto de ϕ, o alguna de sus derivadas, con un factor de la forma x^s, $s > 0$, que al ser evaluados con $\delta(x)$, resultan en 0. Más formalmente, el resultado de derivar n veces a $x^k\phi(x)$ es de la forma

$$\sum_{l-m=k-n} c_{lm} x^l \phi^{(m)}(x), \tag{104}$$

donde c_{lm} son constantes apropiadas, y $0 < k - n \le l \le k$. Por tanto, como

$$\left\langle \delta(x) \,\middle|\, x^l\phi^{(m)}(x) \right\rangle = 0, \quad \text{para} \quad l,\, m > 0, \tag{105}$$

entonces

$$(-1)^n \left\langle \delta(x) \,\middle|\, \frac{d^n}{dx^n}\left(x^k\phi(x)\right) \right\rangle = 0, \tag{106}$$

y por consecuencia,

$$\left\langle x^k\delta^{(n)}(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle = 0, \quad k > n. \tag{107}$$

Si ahora dejamos que $k = n$, el argumento es exactamente el mismo con una pequeña salvedad; ahora habrá un término, y **solo uno**, que no va acompañado de alguna potencia de x: el que resulta de las k derivaciones sucesivas del factor x^k. Este término, que puede calcularse directamente como

$$k!\,\phi(x), \tag{108}$$

es el único que no se anula al tomar

$$(-1)^n \left\langle \delta(x) \,\middle|\, \frac{d^n}{dx^n} \left(x^k \phi(x) \right) \right\rangle, \tag{109}$$

(recuerde que $k = n$) y por tanto,

$$\left\langle x^k \delta^{(n)}(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle = (-1)^n n!\, \phi(0) = \left\langle (-1)^n n!\, \delta(x) \,\middle|\, \phi(x) \right\rangle. \tag{110}$$

Finalmente,

$$x^k \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, \delta(x). \tag{111}$$

S.3.A.

Supongamos inicialmente que $k > 0$. De aquí, que si H es la función de Heaviside, entonces

$$H(kx) = H(x), \tag{112}$$

según la definición de la función de Heaviside. Ahora, definamos la convención

$$L_u = \frac{d}{du}_{gen}, \tag{113}$$

sólo para tener en claro respecto a cuál variable se efectúan las derivadas y hacer más legible el texto. Es sabido que

$$L_x H(x) = \delta(x). \tag{114}$$

En ese sentido, derivando a ambos lados

$$L_x H(kx) = L_x H(x) = \delta(x). \tag{115}$$

Si tomamos que $u = kx$, entonces, en virtud de la regla de la cadena,

$$L_x H(kx) = L_u H(u) \cdot L_x u = k\delta(u) = k\delta(kx). \tag{116}$$

Por tanto,

$$k\delta(kx) = \delta(x) \quad \text{que implica} \quad \delta(kx) = \frac{1}{k}\delta(x). \tag{117}$$

De forma similar, si $k < 0$,

$$H(kx) = 1 - H(x). \tag{118}$$

Derivando a ambos lados, obtenemos que

$$k\delta(kx) = -\delta(x), \tag{119}$$

y por ende,

$$\delta(kx) = -\frac{1}{k}\delta(x), \quad k < 0. \tag{120}$$

Finalmente, queda probado que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x). \tag{121}$$

Ahora, veamos que en efecto estas dos funciones generalizadas son iguales en el sentido distribucional. Sea $f \in C^\infty$ arbitraria y consideremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(kx) f(x)\, dx. \tag{122}$$

Supongamos que $k > 0$. Véase entonces que, si tomamos el cambio de variables $u = kx$, la integral se modifica a

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{k}\right)\, du = \frac{1}{k} f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k}\delta(x) f(x)\, dx. \tag{123}$$

Por ende, obtenemos la relación

$$\delta(kx) = \frac{1}{k}\delta(x), \quad k > 0. \tag{124}$$

Si $k < 0$, del cambio de variables $u = kx$ obtenemos la misma integral, pero ojo, **con los extremos de integración cambiados**, a causa del cambio de signo inducido por k.

$$\frac{1}{k}\int_{\infty}^{-\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{k}\right)\, du = -\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{k}\right)\, du. \tag{125}$$

Esta es exactamente la misma relación, solo que con un signo $(-)$ multiplicando. Por tanto, obtenemos la relación

$$\delta(kx) = -\frac{1}{k}\delta(x), \quad k < 0. \tag{126}$$

Una vez más, vemos que

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x). \tag{127}$$

S.3.B.

Sin olvidar la convención, es útil observar que la regla de la cadena permite establecer una correspondencia entre las derivadas respecto a u y x. Si f es alguna función suave a trozos,

$$L_x f(u) = k \cdot L_u f(u) \implies L_x = kL_u. \tag{128}$$

Por tanto, sigamos el análisis del ejercicio anterior. Si $k > 0$, entonces

$$L_x H(x) = kL_u H(u). \tag{129}$$

Derivando respecto a x nuevamente, y recordando la correspondencia establecida,

$$L_x^2 H(x) = kL_x\left(L_u H(u)\right) \tag{130}$$
$$= k^2 L_u^2 H(u). \tag{131}$$

Entonces

$$\delta'(x) = k^2\delta'(kx), \quad \text{que implica} \quad \delta'(kx) = \frac{1}{k^2}\delta'(x) \tag{132}$$

Para $k < 0$, la relación obtenida era

$$L_x H(x) = -kL_u H(u). \tag{133}$$

Esto nos lleva de inmediato a

$$L_x^2 H(x) = -k^2 L_u^2 H(u), \tag{134}$$

que equivale a

$$\delta'(kx) = -\frac{1}{k^2}\delta'(x), \quad k < 0. \tag{135}$$

Finalmente, queda probado que

$$\delta'(kx) = \pm\frac{1}{k^2}\delta'(x), \quad \text{según} \quad k \gtrless 0. \tag{136}$$

S.4.A.

Para probar esta propiedad solo es necesario recordar el ejercicio S.3.A, y aplicar el resultado para $k = -1$. La prueba es obvia e inmediata.

S.4.B.

De igual manera, la prueba resulta trivial en virtud del resultado de S.3.B

S.5.A.

Existen dos manera de proceder. La primera, mediante la definición de derivada generalizada, y la segunda, empleando la fórmula de Leibniz para derivadas generalizadas. Observe que la función de Heaviside no hace más que esconder el carácter de función a trozos de u mediante el símbolo H. Bien podríamos haber escrito a u mediante

$$u(t) = \begin{cases} t, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{137}$$

y hallar $u'_{gen}(t)$ como

$$u'_{gen}(t) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{138}$$

o, emplear la fórmula de Leibniz y hallar que

$$u'_{gen}(t) = \delta(t)t + H(t) = H(t) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{139}$$

No se deje perturbar por la diferencia sutil en el dominio de la función resultante. Más adelante en sus clases verá que esto es indiferente a efectos de la teoría de integración que está desarrollando. En la mayoría de los casos, si la función no está comprendida por demasiados ”trozos”, es muy conveniente escribirla mediante la Heaviside, y usar la fórmula de Leibniz para derivar.

S.5.B.

Si $u(t) = H(t)e^{-\lambda t}$, entonces

$$u'_{gen}(t) = \delta(t)e^{-\lambda t} - \lambda H(t)e^{-\lambda t} = \delta(t) - \lambda H(t)e^{-\lambda t}. \tag{140}$$

Por tanto, se verifica de inmediato que

$$u'_{gen}(t) + \lambda u(t) = \delta(t). \tag{141}$$

S.5.C.

Puede verse fácilmente que

$$g'_{gen}(t) = \delta(t)\sin(kt) + kH(t)\cos(kt) = kH(t)\cos(kt). \tag{142}$$

Luego,

$$g''_{gen}(t) = \delta(t)k\cos(kt) - k^2H(t)\sin(kt) = k\delta(t) - k^2H(t)\sin(kt). \tag{143}$$

Entonces, se verifica de inmediato que

$$g(t) + k^2 g''_{gen}(t) = k\delta(t). \tag{144}$$

S.5.D.

De forma similar,

$$f'_{gen}(t) = \delta(t)\cos(kt) - kH(t)\sin(kt) = \delta(t) - kH(t)\sin(kt). \tag{145}$$

De aquí que

$$f''_{gen}(t) = \delta'(t) - k^2 H(t)\cos(kt). \tag{146}$$

Por ende, se verifica que

$$f''_{gen}(t) + k^2 f(t) = \delta'(t). \tag{147}$$

Si ahora tomamos $y(t) = H(t)\sinh(kt)$, vemos que

$$y'_{gen}(t) = kH(t)\cosh(kt), \tag{148}$$

y entonces

$$y''_{gen}(t) = k\delta(t) + k^2 H(t)\sinh(kt). \tag{149}$$

Por tanto, y satisface

$$y''_{gen}(t) - k^2 y(t) = k\delta(t). \tag{150}$$

De forma completamente análoga, $q(t) = H(t)\cosh(kt)$ también satisface

$$q''_{gen}(t) - k^2 q(t) = \delta'(t). \tag{151}$$

D.1.

Primero, observemos que tanto $e^{-|x|}$ como $f(x)$ son funciones pares. Por tanto, su producto también es par. De esta manera, podemos reescribir la integral como

$$2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} g(x)\, dx, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha^2, & 0 \le x \le 2\alpha; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{152}$$

Concentrémonos entonces en

$$\left\langle g(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle. \tag{153}$$

Al igual que en los ejercicios T.1, T.2 y T.3, el objetivo es aprovechar la naturaleza cíclica de las derivadas de e^x. Si buscamos expresar la integral en términos de la aplicación de la Delta y sus derivadas, entonces tendremos que derivar tres veces para eliminar la parte “clásica”de la función. En ese sentido, el primer resultado que debe obtenerse es

$$\left\langle g'''_{gen}(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle = -\left\langle g(x) \,\middle|\, \frac{d^3}{dx^3}(e^{-x}) \right\rangle = -\left\langle g(x) \,\middle|\, -e^{-x} \right\rangle = \left\langle g(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle. \tag{154}$$

Es decir, resulta que

$$\left\langle g'''_{gen}(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle = \left\langle g(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle. \tag{155}$$

Procedamos ahora a hallar $g'''_{gen}(x)$. La primera derivada resulta en

$$g'_{gen}(x) = -\alpha^2\delta(x) - 3\alpha^2\delta(x - 2\alpha) + \begin{cases} 2x, & 0 < x < 2\alpha; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{156}$$

Luego,

$$g''_{gen}(x) = -\alpha^2\delta'(x) - 3\alpha^2\delta'(x - 2\alpha) - 4\alpha\delta(x - 2\alpha) + \begin{cases} 2, & 0 < x < 2\alpha; \\ 0, & \text{d.o.m.} \end{cases} \tag{157}$$

Por tanto,

$$g'''_{gen}(x) = -\alpha^2\delta''(x) - 3\alpha^2\delta''(x - 2\alpha) - 4\alpha\delta'(x - 2\alpha) + 2\delta(x) - 2\delta(x - 2\alpha). \tag{158}$$

Evaluando, obtenemos

$$\left\langle g'''_{gen}(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle = -\alpha^2 - 3\alpha^2 e^{-2\alpha} - 4\alpha e^{-2\alpha} + 2 - 2e^{-2\alpha} \tag{159}$$
$$= 2 - \alpha^2 - e^{-2\alpha}(3\alpha^2 + 4\alpha + 2) \tag{160}$$

Finalmente, como

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-|x|} \right\rangle = 2 \left\langle g(x) \,\middle|\, e^{-x} \right\rangle, \tag{161}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x)\, dx = 4 - 2\alpha^2 - 2e^{-2\alpha}(3\alpha^2 + 4\alpha + 2), \quad \alpha > 0. \tag{162}$$

D.2.

Consideremos

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, xe^{-x^2} \right\rangle. \tag{163}$$

No es difícil notar que,

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx} e^{-x^2} = xe^{-x^2}. \tag{164}$$

De aquí, que

$$-\frac{1}{2} \left\langle f(x) \,\middle|\, \frac{d}{dx} e^{-x^2} \right\rangle = \left\langle f(x) \,\middle|\, xe^{-x^2} \right\rangle. \tag{165}$$

Pero

$$-\frac{1}{2} \left\langle f(x) \,\middle|\, \frac{d}{dx} e^{-x^2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle f'_{gen}(x) \,\middle|\, e^{-x^2} \right\rangle \tag{166}$$

Fácilmente podemos obtener a f'_{gen} derivando.

$$f'_{gen}(x) = \lambda\delta(x) + \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases} \tag{167}$$

Entonces, la integral original se separa en dos partes, pues

$$\frac{1}{2} \left\langle f'_{gen}(x) \,\middle|\, e^{-x^2} \right\rangle = \frac{\lambda}{2} \left\langle \delta(x) \,\middle|\, e^{-x^2} \right\rangle + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx. \tag{168}$$

La integral de la derecha es una integral de tabla, aunque fácilmente puede ser hallada mediante el Teorema de Fubini y un cambio a coordenadas polares. Finalmente, evaluando obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) xe^{-x^2}\, dx = \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{169}$$

Este ejercicio es un ejemplo de que no todo en la vida es fácil, y aunque no podamos reducir la integración a meras aplicaciones de la Delta y sus propiedades, bien podemos transformar el problema sin resolver a varios problemas más sencillos, o ya resueltos previamente.

D.3.

Consideremos que

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kx} x^3\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-kx} x^3\, dx. \tag{170}$$

Si definimos $f(x) = H(x)x^3$, entonces nuestro problema puede reescribirse como

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle. \tag{171}$$

Siguiendo el esquema usual, no es difícil ver que

$$\left\langle f_{gen}^{(4)}(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = k^4 \left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle, \tag{172}$$

y por tanto,

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = \frac{1}{k^4} \left\langle f_{gen}^{(4)}(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle. \tag{173}$$

Sin embargo, se debe tener cuidado: en este procedimiento está escondido un detalle teórico **crucial**. Hasta ahora, hemos podido aprovechar funciones de soporte compacto para transformar una integral usual en la aplicación de una función generalizada. Sin embargo, este no es el caso. $H(x)x^3$ **no** se anula fuera de un intervalo finito. Pero aún así, como e^{-kx} decrece más rápido que cualquier polinomio, sabemos que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-kx} x^3 \, dx \tag{174}$$

converge. Además, como $e^{-kx}x^s$ tiende a cero a medida que $x \to \infty$ para k, $s > 0$, aún podemos aplicar la propiedad $\left\langle f'_{gen} \,\middle|\, g \right\rangle = -\left\langle f \,\middle|\, g' \right\rangle$, que no es más que integración por partes. Entonces, en resumen, esta integral puede efectuarse empleando los métodos hasta ahora aprendidos, pero al margen de lo permitido por la teoría; probablemente lo hizo sin saberlo en el ejercicio anterior (¿Puede decir por qué?). Tenga esto muy claro. Simplemente derivando cuatro veces seguidas a f,

$$f_{gen}^{(4)}(x) = 3!\, \delta(x), \tag{175}$$

de manera que

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = \frac{1}{k^4} \left\langle f_{gen}^{(4)}(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = \frac{3!}{k^4}, \tag{176}$$

y finalmente

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^3 \, dx = \frac{3!}{k^4}. \tag{177}$$

D.4.

Esta integral puede efectuarse fácilmente observando los argumentos y el procedimiento del ejercicio anterior. Basta con tomar $f(x) = H(x)x^{s-1}$ y extender la relación a

$$\left\langle f_{gen}^{(s)}(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = (-1)^{2s} k^s \left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = k^s \left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle, \tag{178}$$

que resulta en

$$\left\langle f(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle = \frac{1}{k^s} \left\langle f_{gen}^{(s)}(x) \,\middle|\, e^{-kx} \right\rangle. \tag{179}$$

Como

$$f_{gen}^{(s)}(x) = (s-1)!\, \delta(x), \tag{180}$$

entonces

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} x^{s-1} \, dx = \frac{(s-1)!}{k^s}. \tag{181}$$

Para el caso particular $k = 1$, entonces

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \, dx = (s-1)! \tag{182}$$

de manera que

$$\Gamma(s) = (s-1)! \tag{183}$$

E.1.

Olvidemos las constantes por ahora y concentrémonos en

$$\int_0^\infty \beta^3 \frac{1}{e^\beta - 1}\, d\beta. \tag{184}$$

Notemos que el integrando puede ser reescrito como

$$\beta^3 \frac{1}{e^\beta - 1} = e^{-\beta}\beta^3 \frac{1}{1 - e^{-\beta}} = e^{-\beta}\beta^3 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta}. \tag{185}$$

Esta modificación es válida para nuestra integral, puesto que la serie converge absolutamente para $e^{-\beta} < 1$; es decir, $\beta > 0$. Agrupando, la integral resulta

$$\int_0^\infty \beta^3 \frac{1}{e^\beta - 1}\, d\beta = \int_0^\infty \beta^3 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1)}\, d\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\beta(n+1)}\beta^3\, d\beta, \tag{186}$$

donde el intercambio entre suma y signo de integración es lícito debido a que la suma converge absolutamente para $\beta > 0$. Sin embargo, esta integral ya fue calculada: de hecho, es un caso particular del ejercicio D.3, con $k = n + 1$. Por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\beta(n+1)}\beta^3\, d\beta = 3! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} = 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}. \tag{187}$$

Esta suma es bien conocida, y su valor es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \tag{188}$$

Finalmente, la integral original resulta

$$I = 3!\, \frac{\pi^4}{90} \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4, \tag{189}$$

y por tanto, la constante de la Ley de Stefan-Boltzmann resulta

$$\sigma = 3!\, \frac{\pi^5}{90} \frac{2k^4}{c^2 h^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}. \tag{190}$$

Este es precisamente el valor de dicha constante.

Convolución

T.1.A.

Para hallar $(H * H)(t)$ basta con evaluar directamente

$$(H * H)(t) = H(t) \int_0^t 1 \cdot 1 \, ds = H(t)t. \tag{191}$$

T.1.B.

De forma similar,

$$(H * f)(t) = H(t) \int_0^t s \cdot 1 \, ds = \frac{1}{2} H(t) t^2. \tag{192}$$

T.2.A.

Evaluando directamente,

$$(H * u)(t) = H(t) \int_0^t s^2 \cdot 1 \, ds = \frac{1}{3} H(t) t^3. \tag{193}$$

T.2.B.

Tomando

$$(g * g)(t) = H(t) \int_0^t (t-s) s \, ds = \tag{194}$$

$$= \frac{1}{2} H(t) t^2 - \frac{1}{3} H(t) t^2 \tag{195}$$

$$= \frac{1}{6} H(t) t^2. \tag{196}$$

Es evidente que los resultados no coinciden.

S.1.

Supongamos que

$$\phi(t) = (f * g)(t) = \left[H(t) t^n * H(t) t^k \right](t). \tag{197}$$

Derivando n veces la expresión, obtenemos

$$\phi_{gen}^{(n)}(t) = n! \, \left[H(t) * H(t) t^k \right](t), \tag{198}$$

en virtud de la derivada generalizada de una convolución, y recordando que

$$[H(t) t^n]'_{gen} = n H(t) t^{n-1}. \tag{199}$$

Ahora, si derivamos k veces de nuevo, obtenemos

$$\phi_{gen}^{(n+k)}(t) = n!\,k!\,\left(H * H\right)(t). \tag{200}$$

Derivando una vez más,

$$\phi_{gen}^{(n+k+1)}(t) = n!\,k!\,\left(H'_{gen} * H\right)(t) = n!\,k!\,\left(\delta * H\right)(t) \tag{201}$$

$$= n!\,k!\,H(t). \tag{202}$$

Finalmente, y observando la relación (199), vemos que $\phi(t)$ ha de ser

$$\phi(t) = \frac{n!\,k!}{(n+k+1)!} H(t) t^{n+k+1}. \tag{203}$$

Es decir,

$$\left[H(t)t^n * H(t)t^k\right](t) = \frac{n!\,k!}{(n+k+1)!} H(t) t^{n+k+1}. \tag{204}$$

S.2.

Para hallar $G(x)$ tal que $L(G)(x) = \delta(x)$, tomemos

$$G(x) = H(x)g(x). \tag{205}$$

Con $g \in C^\infty$ arbitraria. Como

$$D(G)(x) = g(0)\delta(x) + H(x)g'(x), \tag{206}$$

y además

$$D^2(G)(x) = g(0)\delta'(x) + g'(0)\delta(x) + H(x)g''(x), \tag{207}$$

entonces

$$L(G)(x) = g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x) + H(x)L(g)(x). \tag{208}$$

Por tanto, para que se satisfaga $L(G)(x) = \delta(x)$, debe suceder que

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad \text{y} \quad D^2 g(x) + \lambda^2 g(x) = 0. \tag{209}$$

Las soluciones de $D^2 g(x) + \lambda^2 g(x) = 0$ son ampliamente conocidas, pues este es el problema del oscilador armónico. Considerando que $g(0) = 0$, entonces la solución buscada es de la forma

$$g(x) = C\sin(\lambda x), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{210}$$

La última condición $g'(0) = 1$ impone que $C = \lambda^{-1}$, de manera que

$$g(x) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x). \tag{211}$$

Finalmente,

$$G(x) = \frac{1}{\lambda} H(x)\sin(\lambda x). \tag{212}$$

Este resultado está en perfecto acuerdo con el obtenido en el ejercicio (S.5.C).

S.3.

Supongamos que $k \neq \omega$. La convolución puede ser evaluada directamente mediante

$$\begin{aligned}(f_k * f_\omega)(t) = H(t) \int_0^t e^{kt-ks} e^{\omega s}\, ds &= H(t) e^{kt} \int_0^t e^{s(\omega - k)}\, ds &(213)\\ &= H(t) e^{kt} \frac{1}{\omega - k} \left(e^{t(\omega-k)} - 1 \right). &(214)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$(f_k * f_\omega)(t) = H(t) \frac{e^{\omega t} - e^{kt}}{\omega - k} = H(t) \frac{e^{kt} - e^{\omega t}}{k - \omega}, \quad k \neq \omega. \tag{215}$$

Si $k = \omega$, entonces la integral (213) se simplifica a

$$H(t) e^{kt} \int_0^t ds = H(t) t e^{kt} = H(t) t e^{\omega t}. \tag{216}$$

Entonces,

$$(f_k * f_\omega)(t) = H(t) t e^{kt} = H(t) t e^{\omega t}, \quad k = \omega. \tag{217}$$

S.4.A.

u'_{gen} puede hallarse directamente como

$$u'_{gen}(x) = H(x). \tag{218}$$

Luego, y recordando el resultado del ejercicio (T.1.A), vemos que

$$(H * u'_{gen})(x) = (H * H)(x) = H(x) x. \tag{219}$$

Parece entonces que la convolución con la función Heaviside sirve para obtener la integral (causal) de una función generalizada.

S.4.B.

Sea u una función causal, suave a trozos. Basta con aplicar la propiedad de la derivada de una convolución para probar esto:

$$(H * u'_{gen}) = (H * u)'_{gen} = (H'_{gen} * u) = (\delta * u) = u. \tag{220}$$

Es decir,

$$(H * u'_{gen}) = u. \tag{221}$$

Esta relación es sumamente útil para la antiderivación de funciones generalizadas. Más adelante, en la sección de Transformada de Laplace Inversa, se usará un método más directo.

S.5.A.

Ésta propiedad puede mostrarse trivialmente mediante

$$(f(t-a) * g(t))(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a - s) g(s)\, ds = (f * g)(t - a). \tag{222}$$

Aunque parezca insignificante, es una propiedad que permite ahorrar tiempo valioso.

S.5.B.

Primero, hallemos $(y * y)(t)$. Para evitar notación incómoda, definamos $H_\alpha(t) = H(t - \alpha)$. Evaluando,

$$(H - H_1 * H - H_1)(t) = (H * H - H_1)(t) - (H_1 * H - H_1)(t) \tag{223}$$

$$= (H * H)(t) - 2(H * H_1)(t) + (H_1 * H_1)(t). \tag{224}$$

Entonces, aplicando los resultados de (222) y (204),

$$(y * y)(t) = tH(t) - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2). \tag{225}$$

De nuevo, para evitar notación incómoda, definamos $r_\alpha(t) = (t - \alpha)H(t - \alpha)$, de manera que

$$(y * y)(t) = r(t) - 2r_1(t) + r_2(t). \tag{226}$$

Ahora, consideremos a $(y * y * y)(t)$:

$$(y * y * y)(t) = (r - 2r_1 + r_2 * H - H_1)(t) \tag{227}$$

$$= (r - 2r_1 + r_2 * H)(t) - (r - 2r_1 + r_2 * H_1)(t) \tag{228}$$

$$= (r - 2r_1 + r_2 * H)(t) - (r - 2r_1 + r_2 * H)(t-1). \tag{229}$$

Entonces, basta con calcular

$$(r - 2r_1 + r_2 * H)(t) = (r * H)(t) - 2(r_1 * H)(t) + (r_2 * H)(t) \tag{230}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 H(t) - (t-1)^2 H(t-1) + \frac{1}{2}(t-2)^2 H(t-2). \tag{231}$$

Luego,

$$(r - 2r_1 + r_2 * H)(t) - (r - 2r_1 + r_2 * H)(t-1) \tag{232}$$

se reduce a

$$\frac{1}{2}t^2 H(t) - \frac{3}{2}(t-1)^2 H(t-1) + \frac{3}{2}(t-2)^2 H(t-2) - \frac{1}{2}(t-3)^2 H(t-3). \tag{233}$$

Finalmente,

$$(y * y * y)(t) = \frac{1}{2}t^2 H(t) - \frac{3}{2}(t-1)^2 H(t-1) + \frac{3}{2}(t-2)^2 H(t-2) - \frac{1}{2}(t-3)^2 H(t-3), \tag{234}$$

y jamás tuvimos que hacer una sola integral. Aquí puede observarse el gran poder de propiedades aparentemente inocentes como (222).

S.6.

Para hallar u basta con aplicar el resultado de (221). Es decir,

$$(H * u'_{gen})(x) = (H * r)(x) - 3(H(x) * x^2 H(x-1))(x), \tag{235}$$

siguiendo la notación de (226). El término de la izquierda es sencillo de evaluar, y aunque podría reescribirse el término de la derecha para aplicar (222) y (204), es más conveniente emplear la definición, pues

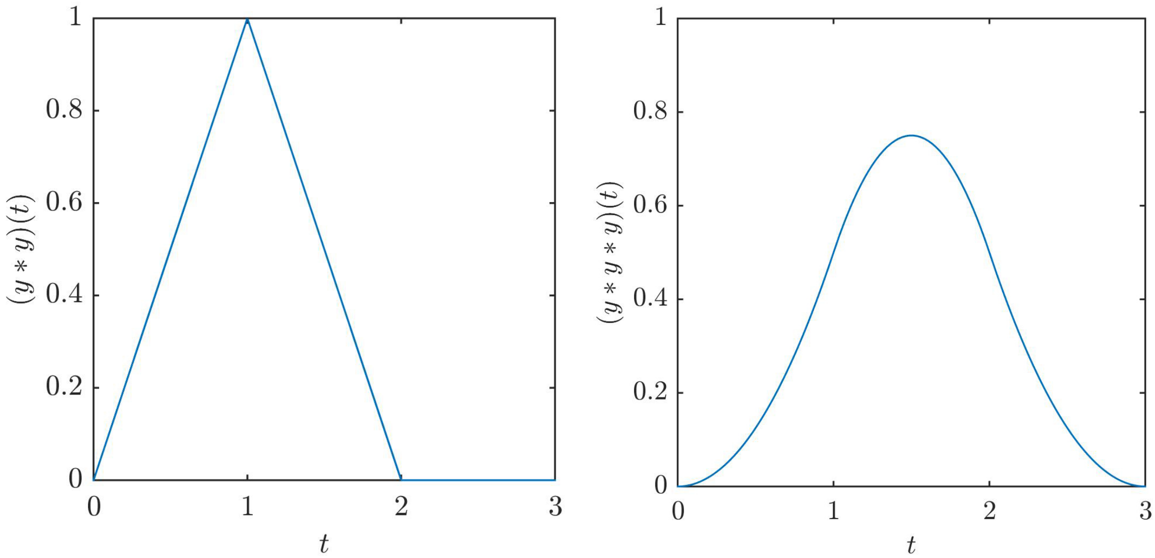
$$(H(x) * x^2 H(x-1))(x) = H(t-1)\int_1^t s^2\, ds = \frac{1}{3}H(t-1)(t^3 - 1), \tag{236}$$

y por tanto

$$(H * u'_{gen})(x) = \frac{1}{2}x^2 H(x) - (t^3 - 1)H(t-1). \tag{237}$$

Finalmente,

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 H(x) - (t^3 - 1)H(t-1). \tag{238}$$



S.7.

Para hallar una solución a la ecuación basta con tomar la derivada de la expresión

$$(H*u)'_{gen}(t) + u'_{gen}(t) = \delta(t). \tag{239}$$

Sin embargo, esta ecuación es equivalente a

$$u'_{gen}(t) + u(t) = \delta(t). \tag{240}$$

Esta ecuación ya fue resuelta en la sección de Derivada Generalizada. Citando el resultado de (141), vemos que

$$u(t) = H(t)e^{-t} \tag{241}$$

es la solución buscada. Sin embargo, a pesar de que este es un resultado notable, puede obtenerse manualmente observando que la ecuación inicial se reduce al problema de hallar el propagador de

$$L = D + 1. \tag{242}$$

Esta verificación se deja al lector.

S.8.A.

Supongamos que $k \neq \omega$. Para hallar la convolución, reescribamos

$$f_k(t) = H(t)\frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} = \frac{1}{2i}H(t)e^{ikt} - \frac{1}{2i}H(t)e^{-ikt}. \tag{243}$$

Adicionalmente, para hacer la escritura más sencilla, definamos

$$v_k(t) = \frac{1}{2i}H(t)e^{ikt}, \quad \text{y} \quad v_{-k}(t) = \frac{1}{2i}H(t)e^{-ikt}, \tag{244}$$

tal que

$$f_k = v_k - v_{-k}. \tag{245}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(f_k * f_\omega) &= (v_k - v_{-k} * v_\omega - v_{-\omega}) && (246)\\ &= (v_k * v_\omega - v_{-\omega}) - (v_{-k} * v_\omega - v_{-\omega}) && (247)\\ &= (v_k * v_\omega) - (v_k * v_{-\omega}) - (v_{-k} * v_\omega) + (v_{-k} * v_{-\omega}). && (248)\end{aligned}$$

Cada una de estas convoluciones pueden resolverse fácilmente recordando (215). Como todas son exactamente de la misma forma, solo que con los parámetros cambiados, basta con resolver una y modificar apropiadamente:

$$(v_k * v_\omega)(t) = -\frac{1}{4}H(t)\frac{e^{ikt} - e^{i\omega t}}{ik - i\omega} = -\frac{1}{4i}H(t)\left(\frac{e^{ikt} - e^{i\omega t}}{k - \omega}\right). \tag{249}$$

Por tanto, como

$$\begin{aligned}(v_k * v_\omega)(t) + (v_{-k} * v_{-\omega})(t) &= -\frac{1}{4i}H(t)\left(\frac{e^{ikt} - e^{i\omega t}}{k - \omega}\right) + \frac{1}{4i}H(t)\left(\frac{e^{-ikt} - e^{-i\omega t}}{k - \omega}\right) && (250)\\ &= -\frac{H(t)}{4i(k - \omega)}\left(e^{ikt} - e^{-ikt} - (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right) && (251)\\ &= -\frac{1}{2(k - \omega)}\left(H(t)\sin kt - H(t)\sin \omega t\right) && (252)\\ &= \frac{1}{2(k - \omega)}\left(f_\omega(t) - f_k(t)\right), && (253)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(v_{-k} * v_\omega)(t) + (v_k * v_{-\omega})(t) &= \frac{1}{4i}H(t)\left(\frac{e^{-ikt} - e^{i\omega t}}{k + \omega}\right) - \frac{1}{4i}H(t)\left(\frac{e^{ikt} - e^{-i\omega t}}{k + \omega}\right) && (254)\\ &= -\frac{H(t)}{4i(k + \omega)}\left(e^{ikt} - e^{-ikt} + e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) && (255)\\ &= -\frac{1}{2(k + \omega)}(f_k(t) + f_\omega(t)). && (256)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(f_k * f_\omega)(t) &= \frac{1}{2(k - \omega)}\left(f_\omega(t) - f_k(t)\right) + \frac{1}{2(k + \omega)}(f_k(t) + f_\omega(t)) && (257)\\ &= \frac{1}{2(k^2 - \omega^2)}\left((k + \omega)(f_\omega(t) - f_k(t)) + (k - \omega)(f_k(t) + f_\omega(t))\right) && (258)\\ &= \frac{2kf_\omega(t) - 2\omega f_k(t)}{2(k^2 - \omega^2)} = \frac{kf_\omega(t) - \omega f_k(t)}{k^2 - \omega^2}. && (259)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$(f_k * f_\omega)(t) = \frac{kf_\omega(t) - \omega f_k(t)}{k^2 - \omega^2} = \frac{\omega f_k(t) - kf_\omega(t)}{\omega^2 - k^2}, \quad k \neq \omega. \tag{260}$$

Observe la simetría en los parámetros; esto no es una coincidencia. Si una función arbitraria f_k depende discretamente de un parámetro k, la forma de la convolución $(f_k * f_\omega)$ no debe depender del orden en que se tome, pues $(f_k * f_\omega) = (f_\omega * f_k)$. Esto también puede observarse en el resultado (215). Si una convolución así le da una forma particular al resultado según el orden en que se tome, puede estar seguro de que se ha equivocado. Para considerar el caso $k = \omega$ basta con tomar

$$\lim_{k\to\omega}\frac{kf_\omega(t) - \omega f_k(t)}{k^2 - \omega^2} = H(t)\lim_{k\to\omega}\frac{k\sin \omega t - \omega \sin kt}{k^2 - \omega^2}; \tag{261}$$

éste límite puede hallarse mediante la regla de L'Hôpital, y

$$H(t)\lim_{k\to\omega}\frac{\sin \omega t - \omega t\cos kt}{2k} = \frac{1}{2\omega}H(t)\sin \omega t - \frac{1}{2}tH(t)\cos \omega t. \tag{262}$$

Por tanto

$$(f_k * f_\omega)(t) = \frac{1}{2\omega}f_\omega(t) - \frac{1}{2}tu_\omega(t), \quad k = \omega, \tag{263}$$

donde $u_\omega(t) = H(t)\cos \omega t$.

S.8.B.

Supongamos que $k \neq \omega$. Basta con notar que $(f_\omega)'_{gen} = \omega u_\omega$, y por tanto

$$(f_k * f_\omega)'_{gen} = \omega(f_k * u_\omega), \tag{264}$$

de manera que

$$(f_k * u_\omega) = \frac{1}{\omega}(f_k * f_\omega)'_{gen}. \tag{265}$$

Evaluando, vemos que

$$(f_k * u_\omega)(t) = \frac{1}{\omega}\frac{k(f_\omega)'_{gen}(t) - \omega(f_k)'_{gen}(t)}{k^2 - \omega^2} = \frac{1}{\omega}\frac{k\omega u_\omega(t) - k\omega u_k(t)}{k^2 - \omega^2}. \tag{266}$$

Finalmente,

$$(f_k * u_\omega) = k\frac{u_\omega(t) - u_k(t)}{k^2 - \omega^2}, \quad k \neq \omega. \tag{267}$$

Para el caso $k = \omega$, el procedimiento es similar, ahora notando que $(u_w)'_{gen} = \delta - \omega f_\omega$:

$$(f_k * u_\omega)(t) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2\omega}(f_\omega)'_{gen}(t) - \frac{1}{2}(tu_\omega(t))'_{gen}\right) \tag{268}$$

$$= \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{2}u_\omega(t) - \frac{1}{2}u_\omega(t) - \frac{1}{2}t\delta(t) + \frac{\omega}{2}tf_\omega(t)\right) \tag{269}$$

$$= \frac{1}{2}tf_\omega(t). \tag{270}$$

Por ende

$$(f_k * u_\omega)(t) = \frac{1}{2}tf_\omega(t), \quad k = \omega. \tag{271}$$

S.8.C.

Supongamos $k \neq \omega$. En el mismo orden de ideas, y notando que

$$(f_k * u_\omega)'_{gen} = k(u_k * u_\omega), \tag{272}$$

obtenemos una relación similar, pues

$$(u_k * u_\omega) = \frac{1}{k}(f_k * u_\omega)'_{gen}. \tag{273}$$

Entonces

$$(u_k * u_\omega)(t) = \frac{\delta(t) - \omega f_\omega(t) - \delta(t) + kf_k(t)}{k^2 - \omega^2} = \frac{kf_k(t) - \omega f_\omega(t)}{k^2 - \omega^2}. \tag{274}$$

Por ende,

$$(u_k * u_\omega)(t) = \frac{kf_k(t) - \omega f_\omega(t)}{k^2 - \omega^2}, \quad k \neq \omega \tag{275}$$

Para el caso $k = \omega$, basta con tomar

$$(u_k * u_\omega)(t) = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}f_\omega(t) + \frac{\omega}{2}tu_\omega(t)\right) = \frac{1}{2\omega}f_\omega(t) + \frac{1}{2}tu_\omega(t). \tag{276}$$

Finalmente,

$$(u_k * u_\omega)(t) = \frac{1}{2\omega}f_\omega(t) + \frac{1}{2}tu_\omega(t), \quad k = \omega. \tag{277}$$

D.1.A.

Para hallar $(f * g)$ basta con tomar la convolución término a término:

$$(f * g)(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (H(x - \pi n) * H(x) \sin x)(x). \tag{278}$$

Como

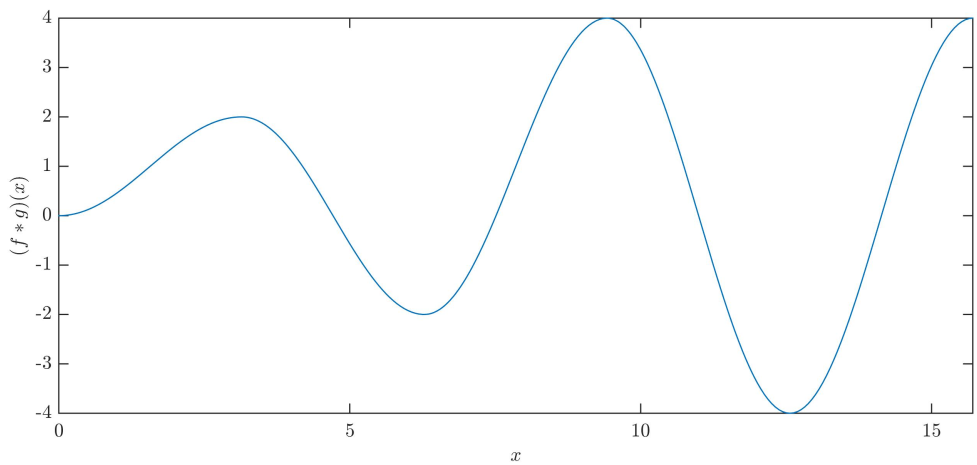
$$\begin{aligned}(H(x - \pi n) * H(x) \sin x)(x) &= (H(x) * H(x) \sin x)(x - \pi n) && (279)\\ &= H(x - \pi n)(1 - \cos(x - \pi n)). && (280)\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que

$$(f * g)(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n H(x - \pi n) - \sum_{n=0}^{N} (-1)^n H(x - \pi n) \cos(x - \pi n). \tag{281}$$

D.1.B.

Graficando $(f * g)(x)$ para $N = 3$ se obtiene la siguiente figura:



D.1.C.

Como $g'_{gen} = v$, entonces

$$\begin{aligned}(f * v)(x) = (f * g)'_{gen}(x) &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \Big(\delta(x - \pi n) + H(x - \pi n) \sin(x - \pi n) \Big) && (282)\\ &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \delta(x - \pi n) + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n H(x - \pi n) \sin(x - \pi n). && (283)\end{aligned}$$

D.2.A.

Para hallar el propagador causal, consideremos el problema

$$L(G)(x) = \delta(x), \tag{284}$$

con $G(x) = H(x)g(x)$. Como

$$D(G)(x) = g(0)\delta(x) + H(x)g'(x) \tag{285}$$
$$D^2(G)(x) = g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x) + H(x)g''(x), \tag{286}$$

entonces

$$L(G)(x) = g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x) + \lambda g(0)\delta(x) + H(x)L(g)(x). \tag{287}$$

De esta manera, vemos que G es el propagador causal de L si g satisface

$$L(g) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \tag{288}$$

Las soluciones de

$$L(g) = D^2 g + \lambda Dg + \eta g = 0 \tag{289}$$

son ampliamente conocidas, y pueden ser calculadas fácilmente usando los métodos de Matemáticas IV. Las dos soluciones independientes vienen dadas por las raíces del polinomio auxiliar y son

$$\exp\left[x\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\Delta}{2}\right)\right] \quad \text{y} \quad \exp\left[x\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2}\right)\right], \tag{290}$$

donde $\Delta = \sqrt{\lambda^2 - 4\eta}$. Por tanto, si

$$g(x) = C_1 \exp\left[x\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\Delta}{2}\right)\right] + C_2 \exp\left[x\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta}{2}\right)\right], \tag{291}$$

con $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$, vemos que $C_2 = -C_1$ y $C_1 = -1/\Delta$. Por tanto,

$$g(x) = \frac{e^{-\lambda x/2}}{\Delta}\left(e^{\Delta x/2} - e^{-\Delta x/2}\right). \tag{292}$$

Sin embargo, si tomamos que

$$\frac{\Delta}{2} = i\mu, \quad \mu = \frac{\sqrt{4\eta - \lambda^2}}{2}, \tag{293}$$

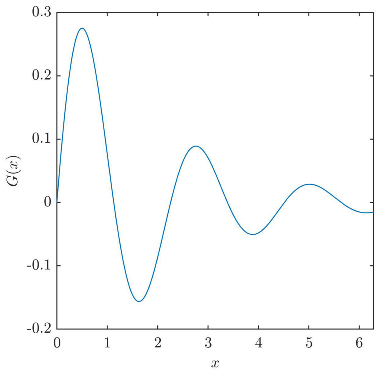
podemos reescribir a $g(x)$ como

$$g(x) = \frac{e^{-\lambda x/2}}{\mu}\left(\frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i}\right) = e^{-\lambda x/2}\left(\frac{\sin \mu x}{\mu}\right). \tag{294}$$

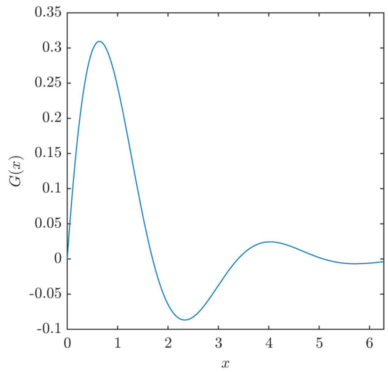
Esta forma para $g(x)$ nos ahorra el problema de maniobrar cuando $4\eta < \lambda^2$ y μ resulta en un número imaginario. Finalmente,

$$G(x) = H(x)e^{-\lambda x/2}\left(\frac{\sin \mu x}{\mu}\right), \quad \mu = \frac{\sqrt{4\eta - \lambda^2}}{2}. \tag{295}$$

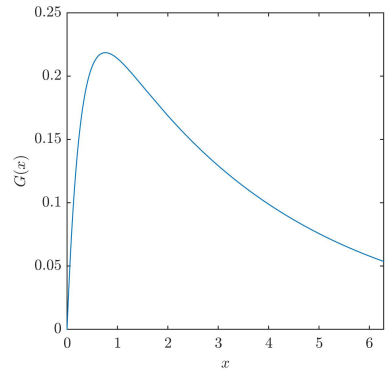
A continuación se muestran gráficas del propagador para distintos valores de λ y η.



(a) $\lambda = 1$, $\eta = 8$



(b) $\lambda = 3/2$, $\eta = 4$



(c) $\lambda = 4$, $\eta = 1$

D.2.B.

Busquemos una solución causal para el P.V.I. Sea $K(x) = H(x)f(x)$. Observe que la ecuación diferencial puede escribirse como

$$L(f)(x), \tag{296}$$

donde L es el operador diferencial del ejercicio anterior, con $\lambda = 2$, $\eta = 2$. Entonces, ahora aplicando L sobre K para hallar soluciones causales, tenemos

$$L(K)(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + 2H(x)\cos x. \tag{297}$$

Por tanto, la solución K viene dada por

$$K(x) = (G(x) * \frac{1}{2}\delta(x) + 2H(x)\cos x)(x), \tag{298}$$

con

$$G(x) = H(x)e^{-x}\left(\frac{\sin \mu x}{\mu}\right), \quad \mu = \frac{\sqrt{4\eta - \lambda^2}}{2} = 1. \tag{299}$$

Es decir,

$$G(x) = H(x)e^{-x}\sin x. \tag{300}$$

Evaluando (298), vemos que

$$(G(x) * \frac{1}{2}\delta(x) + 2H(x)\cos x)(x) = \frac{1}{2}G(x) + 2(G(x) * H(x)\cos x)(x). \tag{301}$$

Si definimos $s_k(x) = H(x)e^{kx}$, siguiendo el esquema empleado en (246),

$$G(x) = \frac{1}{2i}\left(s_{i-1}(x) - s_{-i-1}(x)\right) \quad \text{y} \quad H(x)\cos x = \frac{1}{2}\left(s_i(x) + s_{-i}(x)\right), \tag{302}$$

La convolución de la derecha en (301) se torna

$$\begin{aligned} 2(G(x) * H(x)\cos x)(x) &= \frac{1}{2i}(s_{i-1} - s_{-i-1} * s_i + s_{-i})(x) && (303) \\ &= \frac{1}{2i}(s_{i-1} * s_i + s_{-i})(x) - \frac{1}{2i}(s_{-i-1} * s_i + s_{-i})(x), && (304) \\ & && (305) \end{aligned}$$

Expandiendo, obtenemos

$$\frac{1}{2i}\Big[(s_{i-1} * s_i)(x) + (s_{i-1} * s_{-i})(x) - (s_{-i-1} * s_i)(x) - (s_{-i-1} * s_{-i})(x)\Big]. \tag{306}$$

Aplicando el resultado de (215),

$$(s_{i-1} * s_i)(x) = H(x)\frac{e^{(i-1)x} - e^{ix}}{(i-1)-i} = H(x)e^{ix}(1-e^{-x}), \tag{307}$$

$$(s_{i-1} * s_{-i})(x) = H(x)\frac{e^{(i-1)x} - e^{-ix}}{(i-1)+i} = H(x)\frac{e^{ix}e^{-x} - e^{-ix}}{2i-1}, \tag{308}$$

$$-(s_{-i-1} * s_i)(x) = H(x)\frac{e^{-ix}e^{-x} - e^{ix}}{2i+1}, \tag{309}$$

$$-(s_{-i-1} * s_{-i})(x) = H(x)e^{-ix}(e^{-x}-1). \tag{310}$$

Agrupando inteligentemente los términos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i}\Big[(s_{i-1} * s_i)(x) - (s_{-i-1} * s_{-i})(x)\Big] &= \frac{1}{2i}\Big[H(x)e^{ix}(1-e^{-x}) - H(x)e^{-ix}(1-e^{-x})\Big] && (311)\\
&= H(x)\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}(1-e^{-x}) && (312)\\
&= H(x)(1-e^{-x})\sin x, && (313)
\end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{2i}\Big[(s_{i-1} * s_{-i})(x) - (s_{-i-1} * s_i)(x)\Big] = \frac{1}{2i}\Big[H(x)\frac{e^{ix}e^{-x} - e^{-ix}}{2i-1} + H(x)\frac{e^{-ix}e^{-x} - e^{ix}}{2i+1}\Big]. \tag{314}$$

Expandiendo,

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{H(x)}{2i}\Big[(2i+1)(e^{ix}e^{-x} - e^{-ix}) + (2i-1)(e^{-ix}e^{-x} - e^{ix})\Big], \tag{315}$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{H(x)}{2i}\Big[(e^{ix} - e^{-ix}) + e^{-x}(e^{ix} - e^{-ix}) - 2i(e^{ix} + e^{-ix}) + 2ie^{-x}(e^{ix} + e^{-ix})\Big], \tag{316}$$

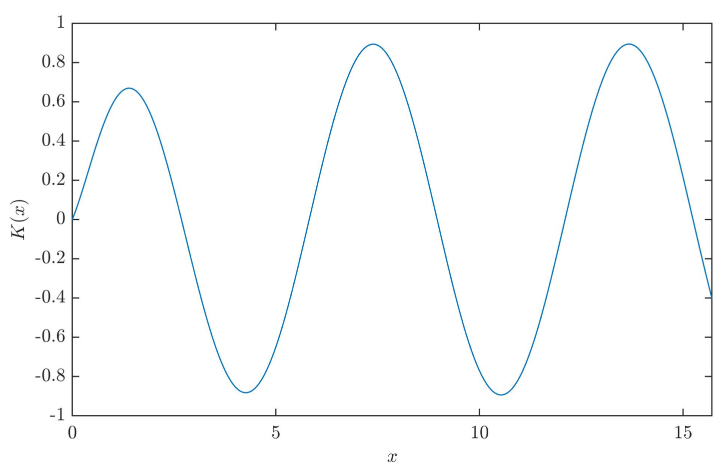
$$-\frac{1}{5}H(x)\Big[\sin x + e^{-x}\sin x - 2\cos x + 2e^{-x}\cos x\Big]. \tag{317}$$

Entonces, juntando (313) y (317)

$$2(G(x) * H(x)\cos x)(x) = \frac{2}{5}H(x)\left(\cos x + 2\sin x - e^{-x}\cos x - 3e^{-x}\sin x\right), \tag{318}$$

y finalmente, sumando el término $G(x)/2$,

$$K(x) = \frac{1}{5}H(x)\left(2\cos x + 4\sin x - 2e^{-x}\cos x - \frac{7}{2}e^{-x}\sin x\right). \tag{319}$$



Este es un ejemplo clásico del oscilador armónico amortiguado y forzado. En vez de usar variación de parámetros para hallar la solución particular, empleamos el propagador causal para hallar dicha solución. Note el leve efecto transitorio para $x \approx 0$, que es característico de sistemas similares.

Transformada de Laplace

T.1.

Basta con evaluar

$$\mathcal{L}\left(\delta\right)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-zx}\,dx = \left\langle \delta(x) \,\middle|\, e^{-zx} \right\rangle = 1. \tag{320}$$

T.2.

De forma similar, basta con evaluar

$$\mathcal{L}\left(H\right)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-zt}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-zt}\,dt = -\lim_{\epsilon\to\infty} \frac{1}{z}e^{-zt}\Big|_0^{\epsilon} = \frac{1}{z}\left(1 - \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{e^{z\epsilon}}\right). \tag{321}$$

El límite

$$\lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{e^{z\epsilon}} = \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{1}{e^{\sigma\epsilon}e^{i\omega\epsilon}}, \quad z = \sigma + i\omega, \tag{322}$$

converge a un valor finito (a 0, de hecho) únicamente si $\Re(z) = \sigma > 0$. Por tanto, la integral únicamente tiene sentido para $\Re(z) > 0$, y tenemos

$$\mathcal{L}\left(H\right)(z) = \frac{1}{z}, \quad \Re(z) > 0, \tag{323}$$

donde $\Re(z)$ denota la parte real de z.

S.1.

No es difícil hallar este resultado empleando las propiedades de la Transformada de Laplace. Primero, veamos que como

$$\mathcal{L}\left(t^n H(t)\right)(z) = \left\langle t^n H(t) \,\middle|\, e^{-tz} \right\rangle, \tag{324}$$

y además,

$$\left\langle f_{gen}^{(n)}(t) \,\middle|\, e^{-tz} \right\rangle = (-1)^n \left\langle f(t) \,\middle|\, (-1)^n z^n e^{-zt} \right\rangle = z^n \left\langle f(t) \,\middle|\, e^{-zt} \right\rangle, \tag{325}$$

entonces

$$\left\langle t^n H(t) \,\middle|\, e^{-tz} \right\rangle = \frac{n!}{z^{n+1}} \left\langle \delta(t) \,\middle|\, e^{-tz} \right\rangle = \frac{n!}{z^{n+1}}. \tag{326}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\left(t^n H(t)\right)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}. \tag{327}$$

Es decir,

$$\mathcal{L}\left(H(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(z) = \frac{1}{z^n}. \tag{328}$$

Para hallar el dominio de la transformada basta con observar la integral correspondiente.

$$\int_0^{\infty} e^{-tz}t^n\,dt. \tag{329}$$

Esta integral es conocida, y es sabido que converge para $\Re(z) > 0$. Entonces,

$$\mathcal{L}\left(H(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(z) = \frac{1}{z^n}, \quad \Re(z) > 0. \tag{330}$$

La fórmula

$$\mathcal{L}\left(H(t)e^{\alpha t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^n}, \quad \Re(z) > \alpha \tag{331}$$

sigue como consecuencia trivial de las propiedades de la Transformada de Laplace.

S.2.A.

Separemos $f(t)$ en sus componentes exponenciales como

$$f(t) = \frac{1}{2i}H(t)e^{i\omega t} - \frac{1}{2i}H(t)e^{-i\omega t}. \tag{332}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(H(t)e^{i\omega t}\right)(z) - \frac{1}{2i}\mathcal{L}\left(H(t)e^{-i\omega t}\right)(z). \tag{333}$$

Aplicando las propiedades de la Transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i\omega} - \frac{1}{z+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{z^2+\omega^2}, \tag{334}$$

y entonces

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}. \tag{335}$$

El dominio de la transformada puede obtenerse considerando que

$$\left|\int_0^\infty e^{-zt}\sin\omega t\,dt\right| \leq \int_0^\infty \left|e^{-zt}\sin\omega t\right|\,dt \leq \int_0^\infty e^{-zt}\,dt. \tag{336}$$

Es sabido que esta integral converge para $\Re(z) > 0$, y por tanto,

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}, \quad \Re(z) > 0. \tag{337}$$

Recuerde, el dominio de la transformada es casi tan importante como la transformada en sí. Piense en Matemáticas IV, cuando hallaba series de potencias: la serie es inútil sin su radio de convergencia.

S.2.B.

Para el coseno, la situación es similar tanto para hallar la transformada como para su dominio. Sea $u(t) = H(t)\cos\omega t$. Entonces,

$$\mathcal{L}(u)(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i\omega} + \frac{1}{z+i\omega}\right) = \frac{z}{z^2+\omega^2}, \quad \Re(z) > 0. \tag{338}$$

S.3.A.

Consideremos

$$\mathcal{L}\left(u'_{gen}\right)(z) = \left\langle u'_{gen}(t)\,\middle|\,e^{-tz}\right\rangle. \tag{339}$$

No es difícil ver que

$$\left\langle u'_{gen}(t)\,\middle|\,e^{-tz}\right\rangle = -\left\langle u(t)\,\middle|\,-ze^{-tz}\right\rangle = z\left\langle u(t)\,\middle|\,e^{-tz}\right\rangle. \tag{340}$$

Por ende,

$$\left\langle u'_{gen}(t)\,\middle|\,e^{-tz}\right\rangle = z\left\langle u(t)\,\middle|\,e^{-tz}\right\rangle, \tag{341}$$

y entonces

$$\mathcal{L}\left(u'_{gen}\right)(z) = z\mathcal{L}(u)(z). \tag{342}$$

S.3.B.

Para mostrar esta propiedad, basta, veamos que como

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt}\,dt, \tag{343}$$

entonces

$$D_z\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) = D_z\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-zt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_z\left[u(t)e^{-zt}\right]dt, \tag{344}$$

según la regla de Leibniz para derivación bajo el símbolo integral. Por tanto,

$$\mathcal{L}\left(u\right)'\left(z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot -te^{-zt}\,dt = -\mathcal{L}\left(tu(t)\right)\left(z\right), \tag{345}$$

suponiendo que $\mathcal{L}\left(tu(t)\right)\left(z\right)$ existe. La fórmula

$$\mathcal{L}\left(t^n u(t)\right)\left(z\right) = (-1)^n D_z^n \mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) \tag{346}$$

resulta trivialmente de la aplicación sucesiva de (345). Formalmente puede aplicarse inducción, aunque esto se deja al lector como ejercicio.

S.4.A.

Para mostrar la propiedad, veamos que como

$$\mathcal{L}\left(u(t-t_0)\right)\left(z\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-t_0)e^{-zt}\,dz, \tag{347}$$

entonces bajo la sustitución $x = t - t_0$, $dx = dt$ la integral resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-zx-zt_0}\,dx = e^{-zt_0}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-zx}\,dx. \tag{348}$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\left(u(t-t_0)\right)\left(z\right) = e^{-zt_0}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-zx}\,dx = e^{-zt_0}\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right). \tag{349}$$

S.4.B.

Si

$$(u * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)g(s)\,ds, \tag{350}$$

entonces

$$\mathcal{L}\left(u * g\right)\left(z\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)g(s)\,ds\right)e^{-zt}\,dt. \tag{351}$$

Suponiendo que la integral doble existe, entonces mediante el teorema de Fubini tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)g(s)\,ds\right)e^{-zt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)g(s)e^{-zt}\,dt\,ds. \tag{352}$$

Tomando la sustitución $x = t - s$, $dx = dt$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t-s)g(s)e^{-zt}\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(s)e^{-zx}e^{-zs}\,dx\,ds. \tag{353}$$

Finalmente, y aplicando el teorema de Fubini una última vez,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)g(s)e^{-zx}e^{-zs}\,dx\,ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-zx}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-zs}\,ds\right); \tag{354}$$

es decir,

$$\mathcal{L}\left(u * g\right)(z) = \mathcal{L}\left(u\right)(z)\cdot\mathcal{L}\left(g\right)(z) = U(z)\cdot G(z). \tag{355}$$

S.5.

Siguiendo el mismo esquema que empleamos para el seno y el coseno, si reescribimos

$$f(t) = \frac{1}{2}H(t)e^{\omega t} - \frac{1}{2}H(t)e^{-\omega t}, \tag{356}$$

entonces obtenemos de forma similar que

$$\mathcal{L}\left(f\right)(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{1}{z+\omega}\right) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}. \tag{357}$$

Para hallar el dominio, basta con considerar

$$\int_0^{\infty} \sinh\omega t\, e^{-tz}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{\omega t}e^{-zt}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\omega t}e^{-zt}\,dt \tag{358}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(\omega-z)t}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-(\omega+z)t}\,dt. \tag{359}$$

Para garantizar la convergencia de la integral, deben satisfacerse simultáneamente $\omega - \Re(z) < 0$ y $\omega + \Re(z) > 0$. Es decir,

$$\Re(z) > \omega \qquad \text{y} \qquad \Re(z) > -\omega. \tag{360}$$

De aquí que $\Re(z) > \omega$. Finalmente,

$$\mathcal{L}\left(f\right)(z) = \frac{\omega}{z^2-\omega^2}, \quad \Re(z) > \omega. \tag{361}$$

Para u, el cálculo es completamente análogo, pues

$$\mathcal{L}\left(u\right)(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{z+\omega}\right) = \frac{z}{z^2-\omega^2}. \tag{362}$$

Además, el dominio es el mismo (¿puede decir por qué?). De manera que

$$\mathcal{L}\left(u\right)(z) = \frac{z}{z^2-\omega^2}, \quad \Re(z) > \omega. \tag{363}$$

S.6.

Para hallar a u, comencemos por tomar la transformada de Laplace a ambos lados.

$$\mathcal{L}\left(u'_{gen}(t)\right)(z) = \mathcal{L}\left(\delta'(t)\right)(z) - 2\mathcal{L}\left(H(t-2)\right)(z). \tag{364}$$

Aplicando las propiedades de la transformada, obtenemos

$$z\mathcal{L}\left(u\right)(z) = z\mathcal{L}\left(\delta\right)(z) - 2e^{-2z}\mathcal{L}\left(H\right)(z). \tag{365}$$

Sea $\mathcal{L}(u)(z) = U(z)$. Entonces, obtenemos una ecuación algebráica en z, pues

$$zU(z) = z - 2e^{-2z} \cdot \frac{1}{z}. \tag{366}$$

Esta ecuación se puede reducir a

$$U(z) = 1 - \frac{2e^{-2z}}{z^2}. \tag{367}$$

Como

$$\mathcal{L}(\delta)(z) = 1, \qquad \mathcal{L}(tH(t))(z) = \frac{1}{z^2}, \tag{368}$$

entonces

$$U(z) = \mathcal{L}(\delta)(z) - 2e^{-2z}\mathcal{L}(tH(t))(z) \tag{369}$$

Y además, como $\mathcal{L}(f(t-t_0))(z) = e^{-zt_0}\mathcal{L}(f)(z)$, entonces

$$U(z) = \mathcal{L}(\delta)(z) - \mathcal{L}(2(t-2)H(t-2))(z). \tag{370}$$

Finalmente, de

$$U(z) = \mathcal{L}(\delta(t) - 2(t-2)H(t-2))(z) \tag{371}$$

obtenemos

$$u(t) = \delta(t) - 2(t-2)H(t-2). \tag{372}$$

S.7.A.

No es difícil verificar que si

$$t\phi(t) + \phi'_{gen}(t) = 0 \tag{373}$$

entonces

$$\mathcal{L}(t\phi(t))(z) + \mathcal{L}\left(\phi'_{gen}(t)\right)(z) = 0 \tag{374}$$

y por tanto, si $\Phi(z) = \mathcal{L}(\phi)(z)$,

$$z\Phi(z) - \Phi'(z) = 0. \tag{375}$$

Note que esta es exactamente la misma ecuación, sólo que con el signo que acompaña a la función derivada cambiado. Esta ecuación diferencial es separable, y su solución se obtiene fácilmente como

$$\Phi(z) = Ce^{z^2/2}, \quad C \in \mathbb{C}. \tag{376}$$

El hecho de que la constante pertenezca a $\mathbb{C}$ es solo una formalidad de haber resuelto la ecuación en el plano complejo.

S.7.B.

Normalmente, como es usual de problemas de valores iniciales, bastaría solo con aplicar alguna condición de la forma $\Phi(0) = \text{ctte}$ para determinar a C. Sin embargo, justamente no conocemos dicha constante, y es necesario hallarla empleando la definición. Entonces, tomemos

$$\Phi(z) = \mathcal{L}\left(e^{-t^2/2}\right)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-zt}\, dt. \tag{377}$$

A pesar de que no sabemos el valor de la constante, realmente no es imprescindible efectuar la integral para z arbitrario: basta con evaluarla para el z más sencillo de calcular. Escogiendo $z = 0$,

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt. \tag{378}$$

El valor de esta integral es conocido, y es $\sqrt{2\pi}$. Sin embargo, su cálculo puede efectuarse sin mayor complicación usando el truco de Fubini para la integral de e^{-x^2} y el cambio a coordenadas polares (Matemáticas V). Por tanto,

$$\Phi(z) = \sqrt{2\pi} e^{z^2/2}. \tag{379}$$

Si se escoge en cambio el camino del sufrimiento y decide hallar la transformada mediante la integral, basta con completar el cuadrado inteligentemente en el argumento de la exponencial como

$$\frac{t^2}{2} + zt = \frac{1}{2}(t+z)^2 - \frac{z^2}{2}. \tag{380}$$

Entonces, la integral se reescribe como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-zt}\, dt = e^{z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z)^2/2}\, dt. \tag{381}$$

Aunque la integral de la derecha parece depender de z, realmente es irrelevante pues la integración se lleva acabo sobre todo $\mathbb{R}$; la simple sustitución $x = t + z$ confirma esto, pues

$$e^{z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z)^2/2}\, dt = e^{z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{382}$$

Ahora puede apreciarse que la integral de la derecha es exactamente la de (378). Por tanto,

$$\Phi(z) = \sqrt{2\pi} e^{z^2/2}. \tag{383}$$

S.8.

Si reescribimos

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kt} \sin nt\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} H(t) \sin nt\, dt, \tag{384}$$

podemos reconocer de inmediato la integral como una transformada de Laplace. Entonces,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kt} \sin nt\, dt = \frac{n}{k^2+n^2}, \quad k > 0. \tag{385}$$

S.9.

De forma similar, podemos reconocer de inmediato a la integral como una transformada de Laplace, pues

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t} t^2 \cos^2 nt\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} H(t) t^2 \cos^2 nt\, dt = \mathcal{L}\left(H(t) t^2 \cos^2 nt\right)(1). \tag{386}$$

Aquí, la transformada

$$\mathcal{L}\left(H(t) t^2 \cos^2 nt\right)(z) \tag{387}$$

puede hallarse tomando

$$\cos^2 nt = \frac{1+\cos 2nt}{2}. \tag{388}$$

De esta manera, si definimos $f(t) = H(t) t^2 \cos nt$,

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(t^2 H(t)\right)(z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(t^2 H(t) \cos 2nt\right)(z). \tag{389}$$

Paso a paso, la transformada de la izquierda se puede hallar mediante el resultado de (331),

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(t^2 H(t)\right)(z) = \frac{1}{z^3}, \tag{390}$$

y la de la derecha mediante las propiedades apropiadas,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(t^2 H(t)\cos 2nt\right)(z) = \frac{1}{2}D^2\mathcal{L}\left(H(t)\cos 2nt\right)(z) \tag{391}$$

$$= \frac{1}{2}D^2\left(\frac{z}{z^2+4n^2}\right). \tag{392}$$

Efectuando la derivada segunda, obtenemos

$$\frac{1}{2}D^2\left(\frac{z}{z^2+4n^2}\right) = \frac{z(z^2-12n^2)}{(z^2+4n^2)^3}. \tag{393}$$

Por tanto,

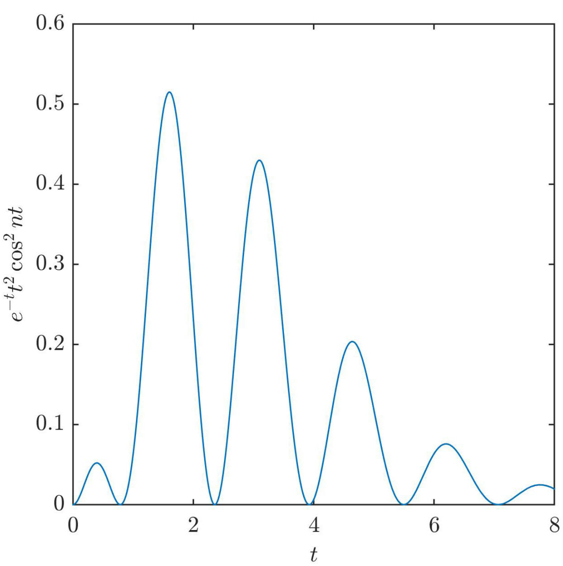
$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{z(z^2-12n^2)}{(z^2+4n^2)^3}, \quad \Re(z) > 0. \tag{394}$$

Evaluando para $z = 1$, según la integral,

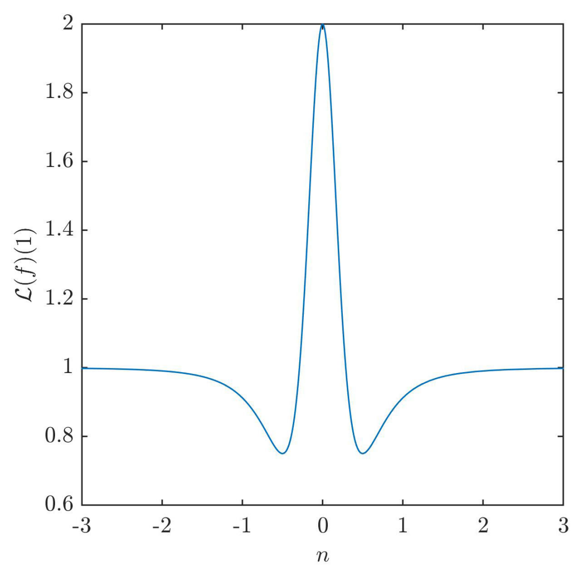
$$\mathcal{L}(f)(1) = 1 + \frac{1-12n^2}{(1+4n^2)^3}. \tag{395}$$

Finalmente,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^2\cos^2 nt\,dt = 1 + \frac{1-12n^2}{(1+4n^2)^3}. \tag{396}$$



(a) $n = 2$



(b) $\mathcal{L}(f)(1)$ como función de n

S.10.

Aplicando el resultado de (136), vemos que

$$\frac{1}{3}\delta'(3x-2) = \frac{1}{3}\delta'\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{27}\delta'\left(x-\frac{2}{3}\right). \tag{397}$$

De esta manera,

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{27}\delta'\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)(z) = \frac{e^{-2z/3}}{27}\mathcal{L}\left(\delta'\right)(z) = \frac{1}{27}e^{-2z/3}z, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{398}$$

S.11.

Emplearemos la definición, pues el propósito de este ejercicio es justamente aclarar el tema. Tomemos

$$\mathcal{L}\left(H(x-\mu)e^{i\nu x}\right)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-\mu)e^{i\nu x}e^{-zx}\,dx \tag{399}$$

Realmente, puede aplicarse primero la propiedad de multiplicación por exponencial o la de traslación en x. Lo importante es entender que aplicar una primero tiene un efecto sobre la segunda. Consideremos por ahora aplicar la propiedad de producto con exponencial:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-\mu)e^{i\nu x}e^{-zx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-\mu)e^{-(z-i\nu)x}\,dx = \mathcal{L}\left(H(x-\mu)\right)(z-i\nu). \tag{400}$$

Por tanto, tomando la sustitución $u = x - \mu$, obtenemos

$$e^{-\mu(z-i\nu)}\int_{-\infty}^{\infty} H(u)e^{-(z-i\nu)x}\,du = e^{-\mu(z-i\nu)}\mathcal{L}\left(H\right)(z-i\nu). \tag{401}$$

Note que en vez de obtener un término $e^{-\mu z}$ al aplicar la propiedad de traslación en x obtuvimos un $e^{-\mu(z-i\nu)}$, que corresponde a haber aplicado la propiedad de factor exponencial primero. Coloquialmente, al cambiar el argumento de la transformada con el factor exponencial $e^{i\nu x}$ a $z - i\nu$, la exponencial que sale de la propiedad de traslación debe llevar **este nuevo argumento**, en vez de z. Ahora, si hubiésemos tomado la sustitución $u = x - \mu$ primero, tendríamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(u)e^{i\nu u}e^{i\nu\mu}e^{-zu}e^{-z\mu}\,du, \tag{402}$$

es decir,

$$e^{-z\mu}\int_{-\infty}^{\infty} H(u)e^{i\nu(u+\mu)}e^{-zu}\,du = e^{-z\mu}\mathcal{L}\left(H(u)e^{i\nu(u+\mu)}\right)(z). \tag{403}$$

Vemos que al aplicar primero la propiedad de traslación agregamos un término adicional a la exponencial, que de hecho es constante y puede salir de la integral. Por tanto

$$e^{-\mu(z-i\nu)}\int_{-\infty}^{\infty} H(u)e^{i\nu u}e^{-zu}\,du = e^{-\mu(z-i\nu)}\mathcal{L}\left(H(u)e^{i\nu u}\right)(z) \tag{404}$$

$$= e^{-\mu(z-i\nu)}\mathcal{L}\left(H\right)(z-i\nu). \tag{405}$$

De cualquier manera, el resultado es

$$\mathcal{L}\left(H(x-\mu)e^{i\nu x}\right)(z) = \frac{e^{-\mu(z-i\nu)}}{z-i\nu}. \tag{406}$$

D.1.

Intentemos efectuar la integral empleando nuestro conocimiento sobre transformadas de Laplace. Primero, veamos que

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-3t} \sin^3 kt \, dt \tag{407}$$

puede ser reescrita en términos de una transformada de Laplace, pues

$$\int_{\lambda}^{\infty} e^{-3t} \sin^3 kt \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t} H(t-\lambda) \sin^3 kt \, dt = \mathcal{L}\left(H(t-\lambda)\sin^3 kt\right)(3). \tag{408}$$

Trataremos entonces de hallar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} H(t-\lambda) \sin^3 kt \, dt \tag{409}$$

para luego evaluar en $z = 3$. Obviamente no sabemos la transformada de $H(t)\sin^3 kt$. Sin embargo, sabemos que se puede reducir $\sin^3 kt$ a una combinación lineal de senos y cosenos (una aplicación usual de la fórmula de De Moivre en Matemáticas VI). En efecto,

$$\begin{aligned}
\sin^3 x &= \left(\frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}e^{-ix}\right)^3 && (410)\\
&= -\frac{1}{8i}e^{3ix} + \frac{3}{8i}e^{ix} - \frac{3}{8i}e^{-ix} + \frac{1}{8i}e^{-3ix} && (411)\\
&= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x. && (412)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\sin^3 kt = \frac{3}{4}\sin kt - \frac{1}{4}\sin 3kt. \tag{413}$$

Ahora, podemos deshacernos de la traslación en la Heaviside: tomando la sustitución $u = t - \lambda$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zt} H(t-\lambda) \sin^3 kt \, dt &= e^{-z\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zu} H(u) \sin^3(ku + k\lambda) \, du && (414)\\
&= e^{-z\lambda} \mathcal{L}\left(H(u)\sin^3(ku+k\lambda)\right)(z). && (415)
\end{aligned}$$

Ahora sí podemos hallar la integral original en términos de transformadas de senos y cosenos, pues como

$$\sin^3(ku + k\lambda) = \frac{3}{4}\sin(ku + k\lambda) - \frac{1}{4}\sin(3ku + 3k\lambda), \tag{416}$$

cada seno puede separarse tranquilamente y lo que queda por hacer es mera carpintería. Veamos pues que, si definimos

$$\begin{aligned}
\lambda_c &= \cos k\lambda, \qquad \lambda_s = \sin k\lambda, && (417)\\
\mu_c &= \cos 3k\lambda, \qquad \mu_s = \sin 3k\lambda, && (418)
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{3}{4}\sin(ku + k\lambda) = \frac{3}{4}\lambda_c \sin ku + \frac{3}{4}\lambda_s \cos ku, \tag{419}$$

y

$$\frac{1}{4}\sin(3ku + 3k\lambda) = \frac{1}{4}\mu_c \sin 3ku + \frac{1}{4}\mu_s \cos 3ku. \tag{420}$$

Por tanto, si definimos (solo para ahorrar en escritura) $f_n(u) = H(u)\sin nu$, $g_n(u) = H(u)\cos nu$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(H(u)\sin^3(ku+k\lambda)\right)(z) = \frac{3}{4}\lambda_c \mathcal{L}(f_k)(z) + \frac{3}{4}\lambda_s \mathcal{L}(g_k)(z)&\\
- \frac{1}{4}\mu_c \mathcal{L}(f_{3k})(z) - \frac{1}{4}\mu_s \mathcal{L}(g_{3k})(z).& \quad (421)
\end{aligned}$$

Cada una de estas transformadas es conocida, y

$$\mathcal{L}\left(H(u)\sin^3(ku+k\lambda)\right)(z) = \frac{3}{4}\left(\frac{\lambda_c k}{z^2+k^2} + \frac{\lambda_s z}{z^2+k^2}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\mu_c k}{z^2+9k^2} + \frac{1}{3}\frac{\mu_s z}{z^2+9k^2}\right) \tag{422}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{\lambda_c k}{z^2+k^2} + \frac{\lambda_s z}{z^2+k^2} - \frac{\mu_c k}{z^2+9k^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu_s z}{z^2+9k^2}\right). \tag{423}$$

Por tanto,

$$e^{-z\lambda}\mathcal{L}\left(H(u)\sin^3(ku+k\lambda)\right)(z) = \frac{3e^{-z\lambda}}{4}\left(\frac{\lambda_c k}{z^2+k^2} + \frac{\lambda_s z}{z^2+k^2} - \frac{\mu_c k}{z^2+9k^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu_s z}{z^2+9k^2}\right), \tag{424}$$

con $\Re(z) > 0$. Finalmente

$$\int_\lambda^\infty e^{-3t}\sin^3 kt\,dt = \frac{3e^{-3\lambda}}{4}\left(\frac{\lambda_c k}{9+k^2} + \frac{3\lambda_s}{9+k^2} - \frac{\mu_c k}{9+9k^2} - \frac{1}{3}\frac{3\mu_s}{9+9k^2}\right), \tag{425}$$

con $0 < \lambda < \infty$, $k \in \mathbb{R}$.

D.2.

Hallar esta transformada es en realidad bastante sencillo con la mentalidad apropiada: como

$$\frac{1}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-nt}, \quad \text{con } t > 0, \tag{426}$$

entonces

$$f(t) = H(t)\frac{1}{1+e^{-t}} = H(t)\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-nt} \tag{427}$$

está perfectamente bien definida, y

$$\mathcal{L}(f)(z) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \mathcal{L}\left(H(t)e^{-nt}\right)(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{z+n}, \quad \Re(z) > 0. \tag{428}$$

D.3.

En efecto, a pesar de que la transformada de f no es inmediata, la de

$$ktf(t) = H(t)\sin kt \tag{429}$$

es conocida. Entonces, tomando la transformada de ambos miembros,

$$k\mathcal{L}(tf(t))(z) = \frac{k}{z^2+k^2}, \tag{430}$$

es decir,

$$D_z\mathcal{L}(f)(z) = -\frac{1}{z^2+k^2}. \tag{431}$$

De aquí, que

$$\mathcal{L}(f)(z) = -\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{z}{k}\right) + C \tag{432}$$

Sí: es importante que no olvide la constante de integración. Esta puede hallarse calculando $\mathcal{L}(f)(0)$ como en (378). Tomando

$$\mathcal{L}(f)(0) = \int_0^\infty \frac{\sin kt}{kt}\, dt, \tag{433}$$

reconocemos de inmediato a la integral de la derecha como la integral de la función $\mathrm{sinc}(x)$, que no posee antiderivada en términos de funciones elementales. El valor de esta integral puede ser consultado, y es $\pi/2k$. Sin embargo, el cálculo de dicha integral no es complicado. Con esto en mano,

$$C = \frac{\pi}{2k}, \tag{434}$$

y finalmente

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{\pi}{2k} - \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{z}{k}\right). \tag{435}$$

D.4.A.

Consideremos $u(t) = H(t)\mathcal{J}_0(t)$. La primera y segunda derivada de u vienen dadas por

$$u'_{gen}(t) = \delta(t) + H(t)\mathcal{J}_0'(t) \tag{436}$$

y

$$u''_{gen}(t) = \delta'(t) + H(t)\mathcal{J}_0''(t). \tag{437}$$

Por tanto,

$$t^2u''_{gen}(t) + tu'_{gen}(t) + t^2u(t) = t^2\delta'(t) + t\delta(t) = 0, \tag{438}$$

en virtud de (107). Entonces, u satisface la ecuación diferencial

$$t^2u''_{gen}(t) + tu'_{gen}(t) + t^2u(t) = 0. \tag{439}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros, tenemos que

$$\mathcal{L}\left(t^2u''_{gen}(t)\right)(z) + \mathcal{L}\left(tu'_{gen}(t)\right)(z) + \mathcal{L}\left(t^2u(t)\right)(z) = 0, \tag{440}$$

y entonces que

$$D^2\Big[z^2\mathcal{L}(u)(z)\Big] - D\Big[z\mathcal{L}(u)(z)\Big] + D^2\Big[\mathcal{L}(u)(z)\Big] = 0. \tag{441}$$

Reescribiendo la ecuación anterior, vemos que

$$D^2\Big[(z^2+1)\mathcal{L}(u)(z)\Big] = D\Big[z\mathcal{L}(u)(z)\Big]; \tag{442}$$

es decir, que

$$D\Big[(z^2+1)\mathcal{L}(u)(z)\Big] = z\mathcal{L}(u)(z) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{C}. \tag{443}$$

Sin embargo, como $\mathcal{L}(u)(0) = 1$ y $\mathcal{L}(u)'(0) = 0$, entonces

$$2z\mathcal{L}(u)(z) + (z^2+1)\mathcal{L}(u)'(z) = z\mathcal{L}(u)(z) + C_1 \quad \text{para } z \to 0 \tag{444}$$

se reduce a

$$C_1 = 0, \tag{445}$$

De manera que

$$2z\mathcal{L}(u)(z) + (z^2+1)\mathcal{L}(u)'(z) = z\mathcal{L}(u)(z) \tag{446}$$

y por tanto,

$$(z^2+1)\mathcal{L}(u)'(z) = -z\mathcal{L}(u)(z). \tag{447}$$

Esta ecuación diferencial puede resolverse fácilmente tomando

$$\frac{U'(z)}{U(z)} = D\Big[\ln(U(z))\Big] = -\frac{z}{z^2+1}, \qquad U(z) = \mathcal{L}\left(u\right)(z), \tag{448}$$

pues entonces

$$\ln(U(z)) = -\frac{1}{2}\ln(z^2+1) + C_2, \tag{449}$$

y de aquí, que

$$U(z) = \frac{C_2}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{450}$$

Finalmente, como $\mathcal{L}\left(u\right)(0) = U(0) = 1$, $C_2 = 1$ y

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{451}$$

D.4.B.

Veamos que

$$\int_0^t \mathcal{J}_0(s)\mathcal{J}_0(t-s)\,ds, \quad t \geq 0 \tag{452}$$

es equivalente en definición a

$$H(t)\int_0^t \mathcal{J}_0(s)\mathcal{J}_0(t-s)\,ds, \tag{453}$$

que no es más que

$$(u*u)(t), \tag{454}$$

según la convención del ejercicio anterior $u(t) = H(t)\mathcal{J}_0(t)$. Tomando la transformada de Laplace de la convolución, podemos observar que

$$\mathcal{L}\left(u*u\right)(z) = \mathcal{L}\left(u\right)(z)\cdot\mathcal{L}\left(u\right)(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+z^2}. \tag{455}$$

Inmediatamente reconocemos a esta expresión como la transformada de $H(t)\sin t$. Por ende, tenemos que

$$\mathcal{L}\left(u*u\right)(z) = \mathcal{L}\left(H(t)\sin t\right)(z), \tag{456}$$

y entonces que

$$H(t)\sin t = (u*u)(t) = H(t)\int_0^t \mathcal{J}_0(s)\mathcal{J}_0(t-s)\,ds; \tag{457}$$

es decir,

$$\sin t = \int_0^t \mathcal{J}_0(s)\mathcal{J}_0(t-s)\,ds, \quad t \geq 0. \tag{458}$$

E.1.A.

Si

$$u(x) = H(x+L)e^{ikx} - H(x-L)e^{ikx}, \tag{459}$$

entonces, empleando el resultado de (406),

$$\mathcal{L}\left(u\right)(z) = \frac{e^{L(z-ik)}}{z-ik} - \frac{e^{-L(z-ik)}}{z-ik} = \frac{e^{L(z-ik)} - e^{-L(z-ik)}}{z-ik}. \tag{460}$$

E.1.B.

Tomando $z = i\omega$,

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(i\omega\right) = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iL(\omega-k)} - e^{-iL(\omega-k)}}{\omega - k} = \frac{2\sin\left(L(\omega-k)\right)}{\omega - k}. \tag{461}$$

Tomando

$$\sigma = \omega - \frac{\pi}{L}, \tag{462}$$

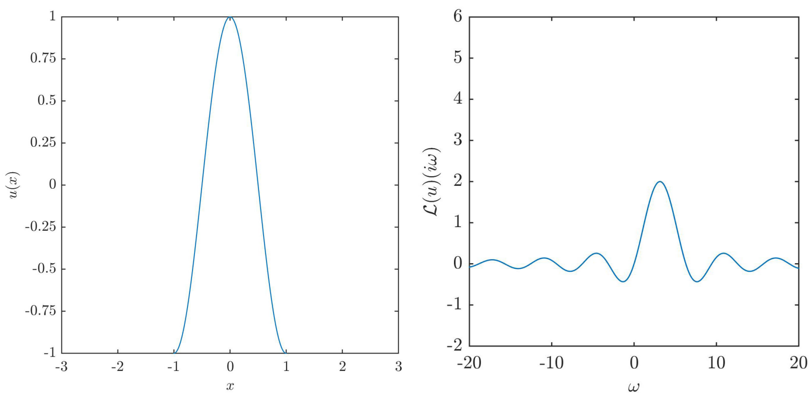
entonces

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(i\omega\right) = \frac{2L\sin\left(\sigma L\right)}{\sigma L}. \tag{463}$$

E.1.C.

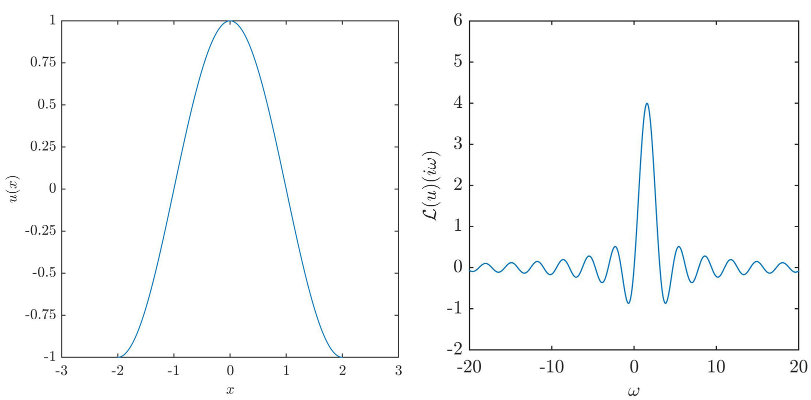
En la página siguiente se muestran las gráficas.

$L = 1$



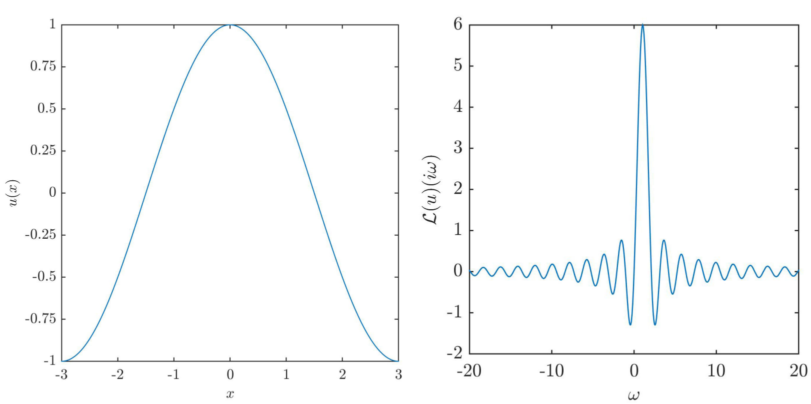
u(x)
x
-3 -2 -1 0 1 2 3
1 0.75 0.5 0.25 0 -0.25 -0.5 -0.75 -1
$\mathcal{L}(u)(i\omega)$
ω
-20 -10 0 10 20
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2

$L = 2$



u(x)
x
-3 -2 -1 0 1 2 3
1 0.75 0.5 0.25 0 -0.25 -0.5 -0.75 -1
$\mathcal{L}(u)(i\omega)$
ω
-20 -10 0 10 20
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2

$L = 3$



u(x)
x
-3 -2 -1 0 1 2 3
1 0.75 0.5 0.25 0 -0.25 -0.5 -0.75 -1
$\mathcal{L}(u)(i\omega)$
ω
-20 -10 0 10 20
6 5 4 3 2 1 0 -1 -2

E.2.A.

Recordando (331), se verifica trivialmente que

$$\mathcal{L}\left(r_j\right)(z) = R_j(z), \tag{464}$$

pues

$$\mathcal{L}\left(H(t)\sum_{k=1}^{N_j} c_{jk} e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)(z) = \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk}\mathcal{L}\left(H(t)e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)(z) \tag{465}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_j}\frac{c_{jk}}{(z-\alpha_j)^k}, \tag{466}$$

en virtud de (331).

E.2.B.

Escribiendo a 1 de forma inteligente, vemos que

$$\frac{e^{tz}}{(z-\alpha_j)^k} = e^{\alpha_j t}\frac{e^{tz}e^{-\alpha_j t}}{(z-\alpha_j)^k} = e^{\alpha_j t}\frac{e^{(z-\alpha_j)t}}{(z-\alpha_j)^k}. \tag{467}$$

Entonces, empleando la serie de Laurent

$$\frac{e^{tz}}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n z^{n-k}}{n!}, \tag{468}$$

obtenemos una serie de Laurent análoga para (467) alrededor de α_j

$$e^{\alpha_j t}\frac{e^{(z-\alpha_j)t}}{(z-\alpha_j)^k} = e^{\alpha_j t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n(z-\alpha_j)^{n-k}}{n!}. \tag{469}$$

Véase que el coeficiente que acompaña al término

$$\frac{1}{z-\alpha_j}, \tag{470}$$

es decir, el residuo, es

$$e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{471}$$

Para extraerlo basta con buscar el coeficiente del término con $n-k=-1$. Finalmente,

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{tz}}{(z-\alpha_j)^k};\ \alpha_j\right) = e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{472}$$

E.2.C.

Como

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{tz}}{(z-\alpha_j)^k};\ \alpha_j\right) = e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{473}$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{N_j} c_{jk}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{tz}}{(z-\alpha_j)^k};\ \alpha_j\right) = \mathrm{Res}\left(\sum_{k=1}^{N_j}\frac{c_{jk}e^{tz}}{(z-\alpha_j)^k};\ \alpha_j\right) = \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk}e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{474}$$

es decir,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_j(z);\ \alpha_j\right) = \sum_{k=1}^{N_j} c_{jk}e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{475}$$

Por tanto, se obtiene que

$$r_j(t) = H(t)\sum_{k=1}^{N_j} c_{jk}e^{\alpha_j t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = H(t)\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_j(z);\ \alpha_j\right). \tag{476}$$

Ahora, como $e^{tz}R_j(t)$, por su misma definición, no tiene singularidades en α_i a menos que $i = j$, entonces

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_j(z);\ \alpha_j\right) = \operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha_j\right) \tag{477}$$

pues el residuo de cada término de la suma en $R(z)$ da cero, a menos que sea el j-ésimo. Es claro que la parte

$$\sum_{k=0}^{N_0} c_k z^k \tag{478}$$

de $R(z)$ puede generarse con deltas y sus derivadas tomando

$$\sum_{k=0}^{N_0} c_k \delta^{(k)}(t), \tag{479}$$

y en virtud de (477), la parte

$$\sum_{j=1}^{p} R_j(z) = \sum_{k=1}^{N_1}\frac{c_{1k}}{(z-\alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{c_{2k}}{(z-\alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p}\frac{c_{pk}}{(z-\alpha_p)^k} \tag{480}$$

puede ser generada con

$$H(t)\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_j(z);\ \alpha_j\right) = H(t)\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha_j\right). \tag{481}$$

Por tanto, el resultado principal que se deseaba obtener es

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k\delta^{(k)}(t) + H(t)\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha_j\right). \tag{482}$$

Una reescritura conveniente es la siguiente: en realidad,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha\right) \tag{483}$$

es cero, a menos que $e^{tz}R(z)$ tenga alguna singularidad no removible en $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces, basta con sumar sobre todas las singularidades posibles de $e^{tz}R(z)$. Es decir, podemos sumar sobre todos los $\alpha \in \mathbb{C}$; los únicos términos que no den cero serán aquellos que correspondan a singularidades no removibles de $e^{tz}R(z)$, y nos olvidamos de indexar las singularidades tomando

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N_0} c_k\delta^{(k)}(t) + H(t)\sum_{\alpha\in\mathbb{C}}\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha\right). \tag{484}$$

Transformada Inversa de Laplace

S.1.A.

Basta con tomar la transformada término a término. De aquí, que

$$\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) = z + \frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+1} = \frac{z^3+2z-1}{z^2+1}. \tag{485}$$

S.1.B.

Véase que, tomando $\mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right) = U(z)$,

$$e^{tz}U(z) = \frac{z^3+2z-1}{z^2+1}e^{tz} \tag{486}$$

tiene singularidades no removibles en $z = \pm i$. Dado que los polos son simples, pues

$$\frac{z^3+2z-1}{z^2+1}e^{tz} = \frac{z^3+2z-1}{(z+i)(z-i)}e^{tz} \tag{487}$$

los residuos en $z = \pm i$ pueden ser calculados fácilmente mediante

$$\operatorname{Res}\left(f;\ c\right) = \lim_{z \to c}(z-c)f(z). \tag{488}$$

Evaluando el límite para $z = \pm i$, obtenemos que

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ i\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2i}\right)e^{it}, \qquad \operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ -i\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\right)e^{-it}. \tag{489}$$

Por tanto,

$$u(t) = H(t)\left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} - \frac{1}{2i}e^{it} + \frac{1}{2i}e^{-it}\right) = H(t)\cos t - H(t)\sin t. \tag{490}$$

Es claro que falta el término $\delta'(t)$, y que este resultado no coincide con el anterior.

S.1.C.

Los resultados no coinciden porque hemos saltado por alto una observación crucial. Para hallar la fórmula que emplea el residuo tomamos que cualquier función racional

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^m}{b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots + b_lz^l} \tag{491}$$

tenía una descomposición de la forma

$$R(z) = \sum_{k=0}^{N_0} c_kz^k + \sum_{k=1}^{N_1}\frac{c_{1k}}{(z-\alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2}\frac{c_{2k}}{(z-\alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p}\frac{c_{pk}}{(z-\alpha_p)^k}, \tag{492}$$

con $N_1 + N_2 + \cdots + N_p = l$. Sin embargo, y esto pudo calcularse sin mayor complicación en E.2, la formula del residuo

$$H(t)\sum_{\alpha \in \mathbb{C}} \operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ \alpha\right) \tag{493}$$

corresponde **únicamente** a la función causal que genera la parte

$$\sum_{k=1}^{N_1} \frac{c_{1k}}{(z-\alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{c_{2k}}{(z-\alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_{pk}}{(z-\alpha_p)^k} \tag{494}$$

de la descomposición. Es decir, con esto **no pueden calcularse** las funciones que corresponden a

$$\sum_{k=0}^{N_0} c_k z^k \tag{495}$$

al aplicar la transformada. En términos más elementales, esto nos lleva a una conclusión sencilla. Los términos $c_k z^k$ de la descomposición aparecen cuando $m \geq l$; es decir, cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador. Entonces, para usar la fórmula del residuo sin perder la cabeza, es conveniente aplicar división larga **hasta lograr que el grado del numerador del cociente resultante sea menor que el del denominador**, a manera de calcular por separado las distintas partes: por un lado, las funciones que corresponden a

$$\sum_{k=0}^{N_0} c_k z^k \tag{496}$$

se hallan sin mucha dificultad reconociendo los términos como la transfomada de derivadas de la delta, y por el otro lado calculando las que corresponden a

$$\sum_{k=1}^{N_1} \frac{c_{1k}}{(z-\alpha_1)^k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{c_{2k}}{(z-\alpha_2)^k} + \cdots + \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_{pk}}{(z-\alpha_p)^k} \tag{497}$$

con la fórmula del residuo.

S.2.

Observando la forma de los términos que aparecen en la suma, no es difícil notar que

$$\frac{1}{n^z} = n^{-z} = e^{-z \ln n}, \quad n > 0. \tag{498}$$

De forma que

$$\zeta(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-z \ln n}, \tag{499}$$

y como

$$\mathcal{L}\left(\delta(t - \ln n)\right)(z) = e^{-z \ln n}, \quad n > 0, \tag{500}$$

en virtud de las propiedades de la transformada de Laplace, tenemos que

$$\xi(t) = \delta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - \ln n). \tag{501}$$

S.3.

Sea $G(z) = \mathcal{L}(g)(z)$. Tomando la transformada a ambos lados,

$$\mathcal{L}\left(g''_{gen}\right)(z) = \mathcal{L}(\delta)(z) + \mathcal{L}(H)(z), \tag{502}$$

obtenemos

$$z^2G(z) = 1 + \frac{1}{z}, \tag{503}$$

y por tanto,

$$G(z) = \frac{z+1}{z^3}. \tag{504}$$

Hallar a g por tablas sería muy sencillo. Vayamos por el camino largo: como el numerador de $G(z)$ es menor que el denominador, podemos aplicar la fórmula del residuo sin contemplar términos adicionales. Preparándonos para aplicar la fórmula, vemos que $G(z)$ tiene un solo polo de orden 3 en $z = 0$. Entonces, para no entrar en complicadas fórmulas de derivadas, basta con hallar la expansión de Laurent alrededor de $z = 0$ y extraer el residuo. Como

$$e^{tz}G(z) = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) e^{tz} = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^n}{n!} \tag{505}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n z^{n-2}}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k z^{k-3}}{k!}. \tag{506}$$

De aquí, que el término con z^{-1} viene dado por

$$\left(t + \frac{1}{2}t^2\right) \frac{1}{z}, \tag{507}$$

y entonces

$$\text{Res}\left(e^{tz}G(z);\ 0\right) = t + \frac{1}{2}t^2. \tag{508}$$

Finalmente,

$$g(t) = H(t)t + \frac{1}{2}H(t)t^2. \tag{509}$$

S.4.

Note que, de entrada, la ecuación puede reescribirse como

$$y'' + \frac{1}{k^2}y = 0. \tag{510}$$

Esta es la ampliamente conocida ecuación del oscilador armónico; a estas alturas, ya debería tener una idea de cómo ha de ser la solución. Empecemos por suponer una solución causal. Sea $u(t) = H(t)y(t)$ y $U(z) = \mathcal{L}\left(u\right)(z)$. Entonces, como

$$u'_{gen}(t) = H(t)y'(t) \tag{511}$$

y

$$u''_{gen}(t) = -\frac{2}{k^2}\delta(t) + H(t)y''(t), \tag{512}$$

entonces

$$u''_{gen}(t) + \frac{1}{k^2}u(t) = -\frac{2}{k^2}\delta(t). \tag{513}$$

Tomando la transformada de Laplace a ambos miembros, vemos que

$$\mathcal{L}\left(u''_{gen}\right)(z) + \frac{1}{k^2}\mathcal{L}\left(u\right)(z) = -\frac{2}{k^2}\mathcal{L}\left(\delta\right)(z) \tag{514}$$

y entonces, la ecuación pasa a ser

$$z^2U(z) + \frac{1}{k^2}U(z) = -\frac{2}{k^2}, \tag{515}$$

o bien

$$k^2z^2U(z) + U(z) = -2. \tag{516}$$

De aquí, que

$$U(z) = \frac{-2}{k^2z^2+1} = \frac{-2}{(kz+i)(kz-i)} = \frac{1}{i}\left(\frac{1}{kz+i} - \frac{1}{kz-i}\right) \tag{517}$$

$$= \frac{1}{ik}\left(\frac{1}{z+i/k} - \frac{1}{z-i/k}\right). \tag{518}$$

De aquí podemos conseguir directamente a $u(t)$ mediante transformadas de tabla como

$$u(t) = \frac{1}{ik}\left(H(t)e^{-it/k} - H(t)e^{it/k}\right) = -\frac{2}{k}H(t)\sin(t/k). \tag{519}$$

S.5.

Intentemos hallar una solución causal al problema. Supongamos que $u(x) = H(x)y(x)$. Entonces, como

$$u'_{gen}(x) = H(x)y'(x), \tag{520}$$

pues $y(0) = 0$, tenemos que

$$xu'_{gen}(x) + u(x) = H(x)x\sin x. \tag{521}$$

Note que

$$(xu(x))'_{gen} = xu'_{gen}(x) + u(x). \tag{522}$$

Esto permite reducir el problema considerablemente pues ahora

$$(xu(x))'_{gen} = H(x)x\sin x. \tag{523}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$\mathcal{L}\left((xu(x))'_{gen}\right)(z) = \mathcal{L}\left(H(x)x\sin x\right)(z), \tag{524}$$

y

$$-zD\Big[\mathcal{L}(u)(z)\Big] = -D\Big[\mathcal{L}(H(x)\sin x)(z)\Big]. \tag{525}$$

Si definimos $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$, entonces

$$-zU'(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2}. \tag{526}$$

De aquí, que

$$U'(z) = -\frac{2}{(z^2+1)^2}. \tag{527}$$

En este punto, hay dos caminos a seguir: el primero es integrar en z para hallar $U(z)$ y luego hallar $u(x)$, mientras que el segundo es aplicar directamente el método de los residuos a $-U'(z)$ para hallar $xu(x)$, y luego despejar, pues $\mathcal{L}(xu(x))(z) = -U'(z)$. Seguiremos ambos, y luego compararemos los resultados. Integrar para hallar a $U(z)$ no es complicado. Tomando la sustitución $z = \tan\beta$ vemos que

$$-dU = \frac{2}{(z^2+1)^2}\,dz = \frac{2}{(\tan^2\beta+1)^2}\sec^2\beta\,d\beta; \tag{528}$$

Es decir,

$$-dU = 2\cos^2\beta\,d\beta. \tag{529}$$

De aquí, que

$$-dU = (1+\cos 2\beta)\,d\beta, \tag{530}$$

y por tanto,

$$U(z) = -\arctan z - \frac{z}{z^2+1} + C. \tag{531}$$

Conocemos cada una de las funciones que generan a estas transformadas, incluso la de la arcotangente, gracias a (435). Entonces,

$$u(x) = H(x)\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) + C\delta(x). \tag{532}$$

Note que aquí hemos absorbido el término $\pi/2$ de la transformada de $\sin x/x$ en la constante arbitraria C. Finalmente, para obtener la solución deseada, debemos hallar el valor de C. Esto se consigue sustituyendo a u en (521) de forma que si

$$xu'_{gen}(x) = x\delta(x)\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) + xH(x)\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} + \sin x\right) + xC\delta'(x) \tag{533}$$

$$= H(x)\left(\cos x - \frac{\sin x}{x} + x\sin x\right) - C\delta(x), \tag{534}$$

entonces

$$xu'_{gen}(x) + u(x) = H(x)\left(\cos x - \frac{\sin x}{x} + x\sin x\right) - C\delta(x) + H(x)\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) + C\delta(x) \tag{535}$$

$$= H(x)x\sin x. \tag{536}$$

Vemos que la ecuación se satisface independientemente del valor de C. Por tanto, podemos tomar libremente $C = 0$, y

$$u(x) = H(x)\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right). \tag{537}$$

Ahora, retrocedamos a

$$-U'(z) = \frac{2}{(z^2+1)^2}. \tag{538}$$

Procederemos a hallar $xu(x)$ usando el método de los residuos. El denominador de la expresión puede reescribirse para obtener

$$-U'(z) = \frac{2}{(z-i)^2(z+i)^2}. \tag{539}$$

De aquí, es claro que $U(z)$ tiene dos polos de segundo orden en $z = \pm i$. En vez de intentar aplicar alguna fórmula para hallar el residuo de

$$\frac{2e^{xz}}{(z-i)^2(z+i)^2} \tag{540}$$

en polos de segundo orden, confiaremos en nuestras habilidades para encontrar la expansión de Laurent alrededor de $z = \pm i$. Comencemos por tomar

$$\mu = z + i, \quad \mu - 2i = z - i. \tag{541}$$

Entonces, si $R(z) = -U'(z)$,

$$e^{xz}R(z) = \frac{2e^{-ix}e^{x\mu}}{\mu^2} \cdot \frac{1}{(2i-\mu)^2} = -\frac{e^{-ix}e^{x\mu}}{2\mu^2} \cdot \frac{1}{(1-\mu/2i)^2}. \tag{542}$$

Sin embargo, como

$$D_\mu\left(\frac{1}{1-\mu/2i}\right) = \frac{1}{2i}\frac{1}{(1-\mu/2i)^2}, \tag{543}$$

tenemos que

$$e^{xz}R(z) = -\frac{ie^{-ix}e^{x\mu}}{\mu^2}D_\mu\left(\frac{1}{1-\mu/2i}\right). \tag{544}$$

Como hallar la expansión de Laurent alrededor de $\mu = 0$ es equivalente a hallar la expansión alrededor de $z = -i$, tenemos que

$$e^{xz}R(z) = -ie^{-ix}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\mu^{n-2}}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\mu^{k-1}}{2^k i^k}\right). \tag{545}$$

Hallando los primeros términos de cada serie,

$$-ie^{-ix}\left(\frac{1}{\mu^2}+\frac{x}{\mu}+\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\cdot\left(\frac{1}{2i}-\frac{\mu}{2}-\frac{3\mu^2}{8i}\cdots\right). \tag{546}$$

De aquí, vemos que el término en μ^{-1} resulta

$$\frac{-ie^{-ix}}{\mu}\left(\frac{x}{2i}-\frac{1}{2}\right). \tag{547}$$

Es decir, el término en $(z+i)^{-1}$ de la expansión de Laurent de (540) alrededor de $z=-i$ es

$$\frac{-ie^{-ix}}{z+i}\left(\frac{x}{2i}-\frac{1}{2}\right). \tag{548}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Res}\left(e^{xz}R(z);\ -i\right)=-\frac{e^{-ix}}{2}\left(-i+x\right). \tag{549}$$

Mediante un cálculo completamente análogo para $z=i$, obtenemos que

$$\operatorname{Res}\left(e^{xz}R(z);\ i\right)=-\frac{e^{-ix}}{2}\left(i+x\right). \tag{550}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} xu(x) &= H(x)\sum_{\alpha\in\mathbb{C}}\operatorname{Res}\left(e^{xz}R(z);\ \alpha\right) && (551)\\ &= H(x)\left[-\frac{e^{-ix}}{2}\left(-i+x\right)-\frac{e^{-ix}}{2}\left(i+x\right)\right] && (552)\\ &= H(x)(\sin x - x\cos x). && (553)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$u(x)=H(x)\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right), \tag{554}$$

tal y como obtuvimos integrando y tomando la constante arbitraria como nula. Esto sirve para ilustrar que hay varios caminos para obtener la solución deseada; no necesariamente teníamos que integrar. Si la integral no viene a la mente, hallar los residuos directamente era un posible camino. Si no desea arriesgarse equivocándose al manipular la expresión para extraer el residuo, integre y utilice las transformadas conocidas, de ser necesario. Ejercite su habilidad de hallar caminos alternativos al resolver problemas; ésta le será útil en el examen y en su carrera profesional.

S.6.

Podemos hallar a u tomando la transformada de Laplace de ambos miembros y aplicando las propiedades:

$$\mathcal{L}\left(u''_{gen}\right)(z)=\mathcal{L}\left(H(t-\pi)\right)(z)+2\mathcal{L}\left(\delta''\right)(z)+4\mathcal{L}\left(\delta'(2-t)\right)(z). \tag{555}$$

Si tomamos $U(z)=\mathcal{L}\left(u\right)(z)$, entonces obtenemos

$$z^2U(z)=\frac{e^{-\pi z}}{z}+2z^2-4ze^{-2z}, \tag{556}$$

recordando que $\delta'(-s)=-\delta'(s)$. De aquí, que

$$U(z)=\frac{e^{-\pi z}}{z^3}+2-\frac{4e^{-2z}}{z}. \tag{557}$$

Aplicando los teoremas operacionales, podemos hallar a u como

$$u(t)=\frac{1}{2}H(t-\pi)(t-\pi)^2+2\delta(t)-4H(t-2). \tag{558}$$

Este es un ejercicio que bien puede lograrse en menos de cinco minutos, teniendo en claro las propiedades fundamentales de la delta de Dirac y la Transformada de Laplace.

S.7.

De forma similar, la estrategia será usar la transformada de Laplace para convertir la ecuación diferencial en una ecuación algebraica. Sea $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$. Tomando la transformada de ambos miembros, tenemos

$$\mathcal{L}\left(f''_{gen}\right)(z) = \mathcal{L}\left(H(t)te^{-2t}\right)(z) + \mathcal{L}\left(H(t)t^2e^{-4t}\right)(z) + \mathcal{L}(\delta)(z), \tag{559}$$

$$z^2F(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{(z+4)^3} + 1 \tag{560}$$

en virtud de (331). De aquí, que

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2} + \frac{2}{z^2(z+4)^3} + \frac{1}{z^2}. \tag{561}$$

En este punto hay dos maneras de proceder: la primera, tomar

$$F(z) = \frac{324 + 500z + 317z^2 + 101z^3 + 16z^4 + z^5}{z^2(2+z)^2(4+z)^3} \tag{562}$$

y encomendar a Jesucristo la ardua tarea de hallar los residuos en $z = 0$, $z = -2$ y $z = -4$. La segunda, es ir **término por término**. Si pensamos en funciones R_1, R_2, y R_3 tal que

$$R_1(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}, \quad R_2(z) = \frac{2}{z^2(z+4)^3}, \quad R_3(z) = \frac{1}{z^2}, \tag{563}$$

entonces podemos hallar funciones r_1, r_2 y r_3, cada una por separado, que generen a R_1, R_2, R_3, respectivamente. Esto es muchísimo más fácil que el mecánico procedimiento de juntar todo en una sola función racional y hallar los residuos. Comencemos por hallar $r_1(t)$.

- Hallando $r_1(t)$: Tal y como hemos hecho en ejercicios anteriores, buscaremos los residuos de

$$e^{tz}R_1(z) = \frac{e^{tz}}{z^2(z+2)^2}. \tag{564}$$

Es claro que $e^{tz}R_1(z)$ tiene polos de orden 2 en $z = 0$ y $z = -2$. Por tanto, y una vez más evadiendo las fórmulas para residuos, hallaremos las series de Laurent de $e^{tz}R_1(z)$ alrededor de $z = 0$ y $z = -2$ para encontrar los residuos. Comparando con (542), vemos que

$$\frac{e^{tz}}{z^2(z+2)^2} = -\frac{e^{tz}}{2z^2}D\left(\frac{1}{1-(-z/2)}\right). \tag{565}$$

Expandiendo alrededor de $z = 0$,

$$e^{tz}R_1(z) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{2} + \cdots\right)\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{3z^2}{8} + \cdots\right), \tag{566}$$

y observamos entonces que el término en z^{-1} resulta

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right). \tag{567}$$

Por tanto,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ 0\right) = \frac{1}{4}(t-1). \tag{568}$$

Ahora, hallemos el residuo en $z = -2$. Tomando $\mu = z + 2$,

$$e^{tz}R_1(z) = e^{-2t}\frac{e^{\mu t}}{\mu^2(\mu-2)^2}. \tag{569}$$

Vemos que con la sustitución, la expresión es exactamente idéntica, salvo por el factor e^{-2t} y el signo $(-)$. Por ende, expandiendo alrededor de $\mu = 0$, que es lo mismo que $z = -2$, llegamos a directamente al resultado, muy similar salvo por el signo menos que desaparece,

$$e^{tz}R_1(z) = \frac{e^{-2t}}{2}\left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{t}{\mu} + \frac{t^2}{2} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{2} + \frac{3\mu^2}{8} + \cdots\right), \tag{570}$$

y de aquí que

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ -2\right) = \frac{e^{-2t}}{4}(t+1). \tag{571}$$

Entonces,

$$r_1(t) = \frac{1}{4}H(t)(t-1) + \frac{1}{4}H(t)e^{-2t}(t+1). \tag{572}$$

- Hallando $r_2(t)$: Para

$$R_2(z) = \frac{2}{z^2(z+4)^3} \tag{573}$$

la situación es similar, solo que ahora hay un polo de orden 3 en $z = -4$. Sin embargo, ésto no hará al cálculo más complicado. Hallemos el residuo en $z = 0$. Como

$$D^2\left(\frac{1}{1-(-z/4)}\right) = \frac{8}{(z+4)^3}, \tag{574}$$

entonces

$$e^{tz}R_2(z) = \frac{2e^{tz}}{z^2(z+4)^3} = \frac{e^{tz}}{4z^2}D^2\left(\frac{1}{1-(-z/4)}\right). \tag{575}$$

Expandiendo alrededor de $z = 0$,

$$e^{tz}R_2(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{t}{z} + \frac{t^2}{2} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{3z}{32} + \frac{3z^2}{64} + \cdots\right). \tag{576}$$

De aquí, y en forma completamente análoga a los casos anteriores, extraemos el residuo del término en z^{-1} y

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ 0\right) = \frac{1}{128}(4t-3). \tag{577}$$

Para $z = -4$, tomemos la sustitución $s = z + 4$. De esta manera

$$e^{tz}R_2(z) = e^{-4t}\frac{2e^{st}}{s^3(4-s)^2}. \tag{578}$$

Ahora, la expansión alrededor de $s = 0$ (es decir, $z = -4$), resulta en

$$e^{tz}R_2(z) = e^{-4t}\frac{e^{st}}{2s^3}D\left(\frac{1}{1-s/4}\right) \tag{579}$$

$$= \frac{e^{-4t}}{2}\left(\frac{1}{s^3} + \frac{t}{s^2} + \frac{t^2}{2s} + \frac{t^3}{3} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{s}{8} + \frac{3s^2}{64} + \cdots\right) \tag{580}$$

El término en s^{-1} es entonces

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{e^{-4t}}{2}\left(\frac{3}{64} + \frac{t}{8} + \frac{t^2}{8}\right), \tag{581}$$

y por tanto,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ -4\right) = \frac{e^{-4t}}{128}\left(3 + 8t + 8t^2\right). \tag{582}$$

Finalmente,

$$r_2(t) = \frac{1}{128}H(t)(4t-3) + \frac{1}{128}H(t)e^{-4t}(3 + 8t + 8t^2). \tag{583}$$

- Hallando $r_3(t)$: $r_3(t)$ se obtiene trivialmente de los teoremas operacionales de la transformada, pues

$$\mathcal{L}\left(H(t)t\right)(z) = \frac{1}{z^2}. \tag{584}$$

Entonces,

$$r_3(t) = H(t)t. \tag{585}$$

Finalmente, juntando todos los resultados anteriores,

$$f(t) = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t). \tag{586}$$

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{4}H(t)(t-1) + \frac{1}{4}H(t)e^{-2t}(t+1) + \frac{1}{128}H(t)(4t-3) \\ + \frac{1}{128}H(t)e^{-4t}(3+8t+8t^2) + H(t)t. \tag{587}$$

S.8.

Sea $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$. Tomando la transformada de Laplace podemos reescribir la ecuación original a una más sencilla en el dominio z, pues

$$\mathcal{L}\left(u(t+\alpha)\right)(z) + \mathcal{L}(u)(z) = \mathcal{L}\left(\delta(t+\alpha)\right)(z) \tag{588}$$

resulta en

$$U(z)e^{\alpha z} + U(z) = e^{\alpha z}. \tag{589}$$

De aquí, que

$$U(z) = \frac{e^{\alpha z}}{e^{\alpha z}+1}. \tag{590}$$

Pero como

$$\frac{e^{\alpha z}}{e^{\alpha z}+1} = \frac{1}{1+e^{-\alpha z}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n\alpha z}, \quad \Re(z) > 0, \tag{591}$$

entonces

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-n\alpha z}, \quad \Re(z) > 0, \tag{592}$$

y $u(t)$ puede obtenerse directamente observando que

$$\mathcal{L}\left(\delta(t-n\alpha)\right)(z) = e^{-n\alpha z}. \tag{593}$$

Finalmente,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \delta(t-n\alpha). \tag{594}$$

S.9.

Efectuar ésta convolución no sería muy complicado empleando las propiedades de la convolución, como en el caso de (197). Sin embargo, aquí procederemos con la transformada de Laplace. Observe que como

$$\mathcal{L}\left(H\right)\left(z\right) = \frac{1}{z}, \tag{595}$$

entonces

$$\mathcal{L}\left(H * H\right)\left(z\right) = \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{z^2}. \tag{596}$$

Aquí hemos tomado **una** convolución. Si repetimos esto n veces, entonces es fácil ver que

$$\mathcal{L}\left(H * H * \cdots * H\right)\left(z\right) = \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \frac{1}{z^{n+1}}. \tag{597}$$

Finalmente, y en virtud de (331),

$$(H * H * \cdots * H)(t) = H(t)\frac{t^n}{n!}, \tag{598}$$

donde el número de convoluciones es n.

S.10.A.

Sean $G(z) = \mathcal{L}\left(g\right)\left(z\right)$ y $U(z) = \mathcal{L}\left(u\right)\left(z\right)$. Para resolver la ecuación usaremos las propiedades de la transformada de Laplace: tomando la transformada de ambos miembros, obtenemos

$$G(z)U(z) + \lambda U(z) = 0; \tag{599}$$

es decir,

$$U(z)(G(z) + \lambda) = 0. \tag{600}$$

En particular, si u es conocida y su transformada no es idénticamente nula ($U(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$), entonces la ecuación anterior únicamente se satisface si

$$G(z) = -\lambda, \tag{601}$$

que a su vez implica

$$g(t) = -\lambda\delta(t). \tag{602}$$

S.10.B.

Este caso es ligeramente diferente, pero la estrategia es la misma: tomando la transformada de ambos miembros de la ecuación, obtenemos

$$G(z)U(z) + \lambda U(z) = \beta G(z), \tag{603}$$

de donde

$$G(z) = \frac{\lambda U(z)}{\beta - U(z)} = \frac{\lambda}{\beta U(z)^{-1} - 1}. \tag{604}$$

Ahora, como

$$U(z) = \frac{1}{z^2 + 1}, \tag{605}$$

entonces

$$G(z) = \frac{\lambda}{\beta z^2 + \beta - 1} = \frac{\lambda}{\beta}\frac{1}{z^2 + 1 - \beta^{-1}}. \tag{606}$$

En este punto, no puede dejarse llevar por el pensamiento mecánico de intentar hallar los residuos de $e^{tz}G(z)$; hay una forma más sencilla. En particular,

$$G(z) = \frac{\lambda}{\beta}\frac{1}{z^2 + 1 - \beta^{-1}} = \frac{\lambda}{\beta\sqrt{1 - \beta^{-1}}}\frac{\sqrt{1 - \beta^{-1}}}{z^2 + (1 - \beta^{-1})}. \tag{607}$$

La función racional

$$\frac{\sqrt{1-\beta^{-1}}}{z^2+(1-\beta^{-1})} \tag{608}$$

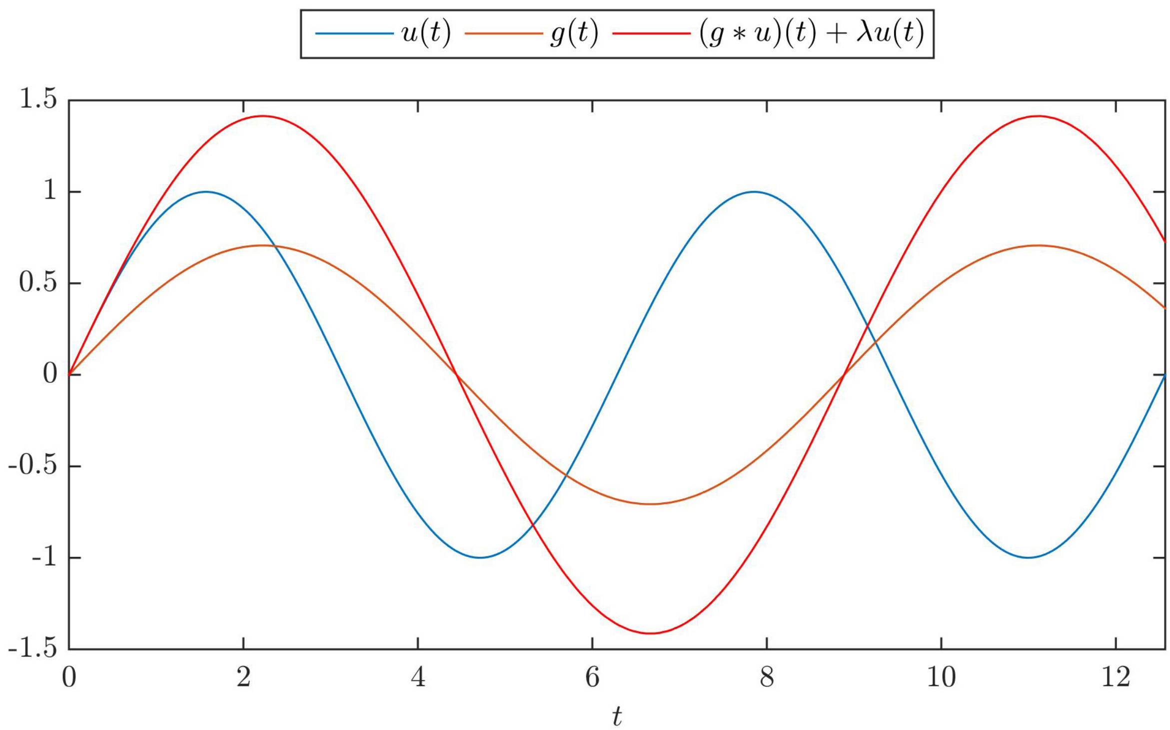
puede reconocerse de inmediato como la transformada de Laplace de

$$H(t)\sin\left(\sqrt{1-\beta^{-1}}t\right). \tag{609}$$

Por tanto, y sin tener que hallar residuo alguno,

$$g(t)=\frac{\lambda}{\beta\sqrt{1-\beta^{-1}}}H(t)\sin\left(\sqrt{1-\beta^{-1}}t\right). \tag{610}$$

Una gráfica para $\lambda = 1$, $\beta = 2$ se muestra a continuación.



S.11.

Podemos hallar a u a través del método de los residuos sin mayor complicación. Antes que nada, veamos que

$$\frac{z^4-2z^2+1}{z^4+2z^2+1}=1-\frac{4z^2}{z^4+2z^2+1}. \tag{611}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}\left(u\right)(z)=1-\frac{4z^2}{z^4+2z^2+1}. \tag{612}$$

Ahora sí podemos aplicar el método de los residuos; propiamente, (484). Sean

$$R_1(z)=1, \qquad R_2(z)=\frac{4z^2}{z^4+2z^2+1}. \tag{613}$$

Hallemos las funciones $r_1(t)$, $r_2(t)$ que generan a éstas por separado:

- $r_1(t)$: Se obtiene trivialmente como $r_1(t) = \delta(t)$.

- $r_2(t)$: Para hallar a $r_2(t)$ comencemos por factorizar el denominador. No es difícil notar que

$$z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2 = (z + i)^2 (z - i)^2. \tag{614}$$

Entonces,

$$R_2(z) = \frac{4z^2}{(z + i)^2 (z - i)^2}. \tag{615}$$

Podemos ver que R_2 tiene polos de orden 2 en $z = \pm i$. Procederemos hallando las expansiones de Laurent alrededor de las singularidades para extraer los residuos de $e^{tz} R_2(z)$. Sea $\mu = z + i$. Entonces

$$e^{tz} R_2(z) = 4e^{-it} \frac{e^{\mu t}}{\mu^2} \frac{(\mu - i)^2}{(\mu - 2i)^2} = e^{-it} \frac{e^{\mu t}}{\mu^2} \frac{(-1 + \mu/i)^2}{(1 - \mu/2i)^2} \tag{616}$$

Recordando que

$$D_\mu \left(\frac{1}{1 - \mu/2i} \right) = \frac{1}{2i} \frac{1}{(1 - \mu/2i)^2}, \tag{617}$$

tenemos

$$e^{tz} R_2(z) = 2ie^{-it} \frac{e^{\mu t}}{\mu^2} (-1 + \mu/i)^2 D_\mu \left(\frac{1}{1 - \mu/2i} \right). \tag{618}$$

Paso a paso, y expandiendo alrededor de $\mu = 0$, como

$$\frac{e^{\mu t}}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{t}{\mu} + \frac{t^2}{2} + \frac{\mu t^3}{3} + \cdots, \tag{619}$$

$$D_\mu \left(\frac{1}{1 - \mu/2i} \right) = \frac{1}{2i} - \frac{\mu}{2} - \frac{3\mu^2}{8i} + \frac{\mu^3}{4} + \cdots, \tag{620}$$

$$\left(\frac{\mu}{i} - 1 \right)^2 = 1 + 2i\mu - \mu^2, \tag{621}$$

entonces, multiplicando los términos uno a uno y luego agrupando en μ^{-1}, vemos que el término en μ^{-1} resulta

$$\frac{1}{\mu} 2ie^{-it} \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2i} \right) = \frac{1}{\mu} e^{-it} (i + t). \tag{622}$$

Por ende,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz} R_2(z);\ -i \right) = e^{-it}(i + t). \tag{623}$$

Ahora, hallemos el residuo en $z = i$. Tomemos $s = z - i$, de forma que

$$e^{tz} R_2(z) = 4e^{it} \frac{e^{st}}{s^2} \frac{(s + i)^2}{(s + 2i)^2} = e^{it} \frac{e^{st}}{s^2} \frac{(1 + s/i)^2}{(1 + s/2i)^2}. \tag{624}$$

De manera completamente análoga a la anterior, expandiendo alrededor de $s = 0$, encontramos que el término en s^{-1} de la expansión de Laurent es

$$\frac{1}{s} e^{it} (-i + t). \tag{625}$$

Por tanto,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz} R_2(z);\ i \right) = e^{it}(-i + t). \tag{626}$$

Juntando los resultados, obtenemos entonces

$$r_2(t) = H(t) \left[e^{it}(-i + t) + e^{-it}(i + t) \right] \tag{627}$$

$$= H(t) \left(2 \sin t + 2t \cos t \right). \tag{628}$$

Finalmente, juntando $r_1(t)$ y $r_2(t)$,

$$u(t) = \delta(t) - H(t) \left(2 \sin t + 2t \cos t \right). \tag{629}$$

S.12.

Intentemos hallar una solución causal al problema. Sea $u(t) = H(t)y(t)$. Como

$$u'_{gen}(t) = -\delta(t) + H(t)y'(t), \tag{630}$$
$$u''_{gen}(t) = -\delta'(t) + H(t)y''(t), \tag{631}$$
$$u'''_{gen}(t) = -\delta''(t) + \delta(t) + H(t)y'''(t), \tag{632}$$

entonces

$$u'''_{gen}(t) + u(t) = -\delta''(t) + \delta(t) + H(t)t. \tag{633}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros,

$$\mathcal{L}\left(u'''_{gen}\right)(z) + \mathcal{L}\left(u\right)(z) = -\mathcal{L}\left(\delta''\right)(z) + \mathcal{L}\left(\delta\right)(z)\mathcal{L}\left(H(t)t\right)(z). \tag{634}$$

Cada una de las transformadas es sencilla de calcular, y obtenemos

$$z^3U(z) + U(z) = -z^2 + 1 + \frac{1}{z^2}. \tag{635}$$

De aquí, que

$$U(z) = \frac{1-z^2}{z^3+1} + \frac{1}{z^2(z^3+1)}. \tag{636}$$

Nuevamente, conviene emplear el esquema de calcular las cosas por separado. Sean

$$R_1(z) = \frac{1-z^2}{z^3+1}, \quad R_2(z) = \frac{1}{z^2(z^3+1)}, \tag{637}$$

y r_1, r_2 tales que

$$\mathcal{L}\left(r_1\right)(z) = R_1(z), \quad \mathcal{L}\left(r_2\right)(z) = R_2(z). \tag{638}$$

Hallemos r_1, r_2 para luego juntarlas y obtener a $u(t)$.

- $r_1(t)$: no es difícil ver que los ceros de $z^3 + 1$ ocurren en

  $$z = -e^{2\pi ik/3}, \quad k = 0,\, 1,\, 2. \tag{639}$$

  Por tanto,

  $$R_1(z) = \frac{(1+z)(1-z)}{(z+1)(z+e^{2\pi i/3})(z+e^{4\pi i/3})} = \frac{1-z}{(z+e^{2\pi i/3})(z+e^{4\pi i/3})}. \tag{640}$$

  Como los polos son simples, el cálculo se simplifica muchísimo. Empleando el método de su preferencia, puede encontrar directamente que

  $$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ -e^{2\pi i/3}\right) = -\frac{1+e^{2\pi i/3}}{1+2e^{2\pi i/3}}\exp\left(\frac{t}{2} - i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right), \tag{641}$$

  $$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ -e^{4\pi i/3}\right) = -\frac{1-e^{\pi i/3}}{1-2e^{\pi i/3}}\exp\left(\frac{t}{2} + i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right). \tag{642}$$

  De esta manera, y a pesar de que el resultado no es compacto,

  $$r_1(t) = H(t)\left[-\frac{1+e^{2\pi i/3}}{1+2e^{2\pi i/3}}\exp\left(\frac{t}{2} - i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1-e^{\pi i/3}}{1-2e^{\pi i/3}}\exp\left(\frac{t}{2} + i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right]. \tag{643}$$

- $r_2(t)$: con
$$R_2(z) = \frac{1}{z^2(z^3+1)} \tag{644}$$
el procedimiento es similar, solo que ahora debemos tomar en cuenta todos los ceros de z^3+1 y la nueva singularidad en $z=0$. De nuevo, como los polos son simples, podemos hallar los residuos en $z=-e^{2\pi ik/3}$, $k=0,\,1,\,2$, directamente como
$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\,-1\right) = \frac{1}{3}e^{-t}, \tag{645}$$
$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\,-e^{2\pi i/3}\right) = \frac{1}{3}e^{-2\pi i/3}\exp\left(\frac{t}{2}-i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right), \tag{646}$$
$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\,-e^{2\pi i/3}\right) = -\frac{1}{3}e^{-\pi i/3}\exp\left(\frac{t}{2}+i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right). \tag{647}$$
EL residuo en $z=0$ es bastante fácil de hallar también, pues
$$e^{tz}R_2(z) = \frac{e^{tz}}{z^2}\frac{1}{1-(-z^3)}. \tag{648}$$
Expandiendo $e^{tz}R_2(z)$ alrededor de $z=0$ obtenemos que como
$$\frac{e^{zt}}{z^2} = \frac{1}{z^2}+\frac{t}{z}+\frac{t^2}{2}+\frac{zt^3}{3}+\cdots, \tag{649}$$
$$\frac{1}{1-(-z^3)} = 1-z^3+z^6-z^9+\cdots, \tag{650}$$
entonces el residuo es
$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\,0\right) = t. \tag{651}$$
Por tanto,
$$r_2(t) = H(t)\left[\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2\pi i/3}\exp\left(\frac{t}{2}-i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{3}e^{-\pi i/3}\exp\left(\frac{t}{2}+i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+t\right] \tag{652}$$

Finalmente, juntando r_1 y r_2,
$$\begin{aligned} u(t) = H(t)\Bigg\{t+\frac{1}{3}e^{-t}+\left[\frac{1}{3}e^{-2\pi i/3}-\frac{1+e^{2\pi i/3}}{1+2e^{2\pi i/3}}\right]\exp\left(\frac{t}{2}-i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)& \\ +\left[-\frac{1}{3}e^{-\pi i/3}-\frac{1-e^{\pi i/3}}{1-2e^{\pi i/3}}\right]\exp\left(\frac{t}{2}+i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg\}.& \end{aligned} \tag{653}$$
El ejercicio bien podría terminar aquí. Pero, y contra toda intuición, resulta que
$$\frac{1}{3}e^{-2\pi i/3}-\frac{1+e^{2\pi i/3}}{1+2e^{2\pi i/3}} = -\frac{2}{3}, \quad \text{y} \quad -\frac{1}{3}e^{-\pi i/3}-\frac{1-e^{\pi i/3}}{1-2e^{\pi i/3}} = -\frac{2}{3}. \tag{654}$$
Entonces,
$$\begin{aligned} u(t) &= H(t)\left\{t+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{t/2}\left[\exp\left(i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)+\exp\left(-i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right\} && (655)\\ &= H(t)\left[t+\frac{1}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{t/2}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right]. && (656) \end{aligned}$$

D.1.

Intentemos hallar una solución causal al problema. Sea $u(t) = H(t)y(t)$. Como

$$u'_{gen}(t) = H(t)y'(t), \tag{657}$$

$$u''_{gen}(t) = \frac{1}{2}\delta(t) + H(t)y''(t), \tag{658}$$

$$u'''_{gen}(t) = \frac{1}{2}\delta'(t) + H(t)y'''(t), \tag{659}$$

entonces la ecuación causal es

$$tu'''_{gen}(t) + 3u''_{gen}(t) - tu(t) = \delta(t). \tag{660}$$

Ahora, tomando la transformada de Laplace de ambos miembros, tenemos

$$\mathcal{L}\left(tu'''_{gen}(t)\right)(z) + 3\mathcal{L}\left(u''_{gen}\right)(z) - \mathcal{L}\left(tu(t)\right)(z) = \mathcal{L}\left(\delta\right)(z), \tag{661}$$

de donde

$$-D\Big[z^3U(z)\Big] + 3z^2U(z) + D\left(U(z)\right) = 1; \tag{662}$$

es decir,

$$U'(z) - z^3U'(z) = 1. \tag{663}$$

De aquí que U satisface

$$U'(z) = \frac{1}{1-z^3}. \tag{664}$$

Nuestra opinión es que, en este punto, es claro que integrar no es una opción viable (al menos durante un parcial, por ejemplo). En vez de seguir el camino del sufrimiento, una vez más delegaremos el trabajo pesado a las propiedades de la transformada. Hallaremos a $tu(t)$ mediante los residuos de $-e^{tz}U'(z)$, y con ella obtendremos a $u(t)$. Sea $R(z) = -U'(z)$. Entonces,

$$R(z) = \frac{1}{z^3-1}. \tag{665}$$

Esta función racional tiene polos simples en las (tres) raíces de la unidad,

$$z = e^{2\pi ik/3}, \quad k = 0,\ 1,\ 2. \tag{666}$$

Estos residuos son fáciles de calcular. Ahora, es claro que conseguir a u no será algo difícil. Lo difícil del ejercicio es exorcizar el impulso de pensar mecánicamente. Los tres residuos de R en las raíces de la unidad resultan,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ 1\right) = \frac{1}{3}e^t, \tag{667}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ e^{2\pi i/3}\right) = -\frac{1}{3}e^{-\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} + i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right), \tag{668}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ e^{4\pi i/3}\right) = \frac{1}{3}e^{-2\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} - i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right). \tag{669}$$

Entonces,

$$tu(t) = \frac{1}{3}H(t)\left[e^t + e^{-2\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} - i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - e^{-\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} + i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right], \tag{670}$$

y finalmente

$$u(t) = \frac{1}{3t}H(t)\left[e^t + e^{-2\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} - i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - e^{-\pi i/3}\exp\left(-\frac{t}{2} + i\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)\right]. \tag{671}$$

A propósito, aún si llegase a integrar (664), obtendría

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2z}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\ln(1-z) + \frac{1}{6}\ln(1+z+z^2) + C. \tag{672}$$

No hace falta indicar por qué hallar a $u(t)$ de esta expresión es innecesariamente complicado.

D.2.

Encontremos una solución causal para el P.V.I. Sea $u(t) = H(t)y(t)$. Como

$$u'_{gen}(t) = H(t)y'(t), \tag{673}$$

$$u''_{gen}(t) = \delta(t) + H(t)y''(t), \tag{674}$$

entonces u satisface

$$u''_{gen}(t) + 2u'_{gen}(t) + 3u(t) = \delta(t) + H(t)e^{-t}\sin t \tag{675}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros, vemos que

$$\mathcal{L}\left(u''_{gen}\right)(z) + 2\mathcal{L}\left(u'_{gen}\right)(z) + 3\mathcal{L}(u)(z) = \mathcal{L}(\delta)(z) + \mathcal{L}\left(H(t)e^{-t}\sin t\right)(z). \tag{676}$$

Sea $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$. De lo anterior, obtenemos

$$z^2U(z) + 2zU(z) + 3U(z) = 1 + \frac{1}{(z+1)^2+1}, \tag{677}$$

De aquí en adelante el procedimiento es estándar a estas alturas; calcularemos los residuos de la forma más sencilla posible. Vemos que U satisface

$$U(z) = \frac{1}{z^2+2z+3} + \frac{1}{(z^2+2z+3)(z+1+i)(z+1-i)}, \tag{678}$$

pero como z^2+2z+3 tiene raíces en

$$z = -1 \pm i\sqrt{2}, \tag{679}$$

entonces, tomando $k_\pm = -1 \pm i\sqrt{2}$ para simplificar la escritura,

$$U(z) = \frac{1}{(z-k_-)(z-k_+)} + \frac{1}{(z-k_-)(z-k_+)(z+1+i)(z+1-i)}. \tag{680}$$

Ahora, sean R_1, R_2, r_1, y r_2 tales que

$$R_1(z) = \frac{1}{(z-k_-)(z-k_+)}, \quad R_2(z) = \frac{1}{(z-k_-)(z-k_+)(z+1+i)(z+1-i)}, \tag{681}$$

con

$$\mathcal{L}(r_1)(z) = R_1(z), \quad \mathcal{L}(r_2)(z) = R_2(z). \tag{682}$$

Hallaremos a r_1 y r_2 por separado, tal y como hemos hecho en los ejercicios anteriores. Afortunadamente, los polos tanto en R_1 como R_2 son simples, y los residuos pueden hallarse directamente.

- $r_1(t)$: para hallar los residuos de $e^{tz}R_1(z)$ basta con emplear la fórmula de su preferencia. Estos resultan

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ k_-\right) = -\frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t - it\sqrt{2}\right), \tag{683}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_1(z);\ k_+\right) = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t + it\sqrt{2}\right). \tag{684}$$

  Por tanto,

$$r_1(t) = H(t)\left[\frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t+it\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t-it\sqrt{2}\right)\right]. \tag{685}$$

  Reescribiendo un poco, obtenemos

$$r_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(t)e^{-t}\sin(t\sqrt{2}). \tag{686}$$

- $r_2(z)$: de nuevo, como los polos son simples, el trabajo pesado es solo la carpintería necesaria. Empleando la fórmula de su preferencia,

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ k_-\right) = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t-it\sqrt{2}\right), \tag{687}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ k_-\right) = -\frac{1}{2i\sqrt{2}}\exp\left(-t+it\sqrt{2}\right), \tag{688}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ -1-i\right) = -\frac{1}{2i}\exp\left(-t-it\right), \tag{689}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R_2(z);\ -1-i\right) = \frac{1}{2i}\exp\left(-t+it\right). \tag{690}$$

Por tanto,

$$r_2(t) = H(t)\left(\frac{1}{2i\sqrt{2}}e^{-t}e^{-it\sqrt{2}} - \frac{1}{2i\sqrt{2}}e^{-t}e^{it\sqrt{2}} + \frac{1}{2i}e^{-t}e^{it} - \frac{1}{2i}e^{-t}e^{-it}\right). \tag{691}$$

Reescribiendo,

$$r_2(t) = H(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin(t\sqrt{2}) + e^{-t}\sin t\right). \tag{692}$$

Finalmente, juntando r_1 y r_2, u resulta

$$u(t) = H(t)e^{-t}\sin t. \tag{693}$$

D.3.

Con las herramientas de la transformada de Laplace en mano, podemos hallar el propagador directamente de una ecuación en derivadas generalizadas: sea u una función causal y U su transformada de Laplace. Considere

$$(D^3 - 2D^2 - D + 2)u = \delta. \tag{694}$$

Tomando la transformada a ambos miembros, obtenemos

$$(z^3 - 2z^2 - z + 2)U(z) = 1. \tag{695}$$

Por tanto, U satisface

$$U(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 - z + 2}. \tag{696}$$

Factorizar un polinomio de tercer grado no es tarea fácil. Sin embargo, no es difícil observar que 1 es una raíz de $z^3 - 2z^2 - z + 2$, de manera que

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z-1)(z^2 - z - 2), \tag{697}$$

y con esto, podemos factorizar completamente como

$$z^3 - 2z^2 - z + 2 = (z-1)(z+1)(z-2). \tag{698}$$

Entonces,

$$U(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)(z-2)}. \tag{699}$$

Todos los polos de U son simples, y los residuos pueden hallarse directamente como

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ 1\right) = -\frac{1}{2}e^{t}, \tag{700}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ -1\right) = \frac{1}{6}e^{-t}, \tag{701}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ 2\right) = \frac{1}{3}e^{2t}. \tag{702}$$

Finalmente,

$$u(t) = H(t)\left(\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{t}\right). \tag{703}$$

D.4.

Comencemos por tomar la transformada de Laplace de ambos miembros. Sea $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$, entonces, tomando la transformada, obtenemos

$$z^3 U(z) + kU(z) = z^k, \tag{704}$$

de manera que U satisface

$$U(z) = \frac{z^k}{z^3 + k}. \tag{705}$$

Ahora, bajo la condición $k \leq 5$, pueden ocurrir una de dos cosas. La primera, que $k < 3$, en cuyo caso

$$\frac{z^k}{z^3 + k} \tag{706}$$

es irreducible, y la segunda, con $3 \leq k \leq 5$, donde

$$\frac{z^k}{z^3 + k} = z^{k-3} - \frac{kz^{k-3}}{z^3 + k}. \tag{707}$$

Entonces, consideremos cada caso por separado:

- $k < 3$: bajo esta suposición, hallar los residuos de $e^{tz}U(z)$ basta para encontrar a u. Supongamos que $\beta^3 = k$, $\beta \in \mathbb{R}$. Entonces, $e^{tz}U(z)$ tiene polos simples en

  $$z = -\beta e^{2\pi i n/3}, \quad n = 0,\, 1,\, 2. \tag{708}$$

  Como los polos son simples, los residuos pueden hallarse directamente mediante alguna fórmula conveniente y resultan

  $$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ -\beta\right) = \frac{1}{3}(-1)^k \beta^{k-2} e^{-\beta t}, \tag{709}$$

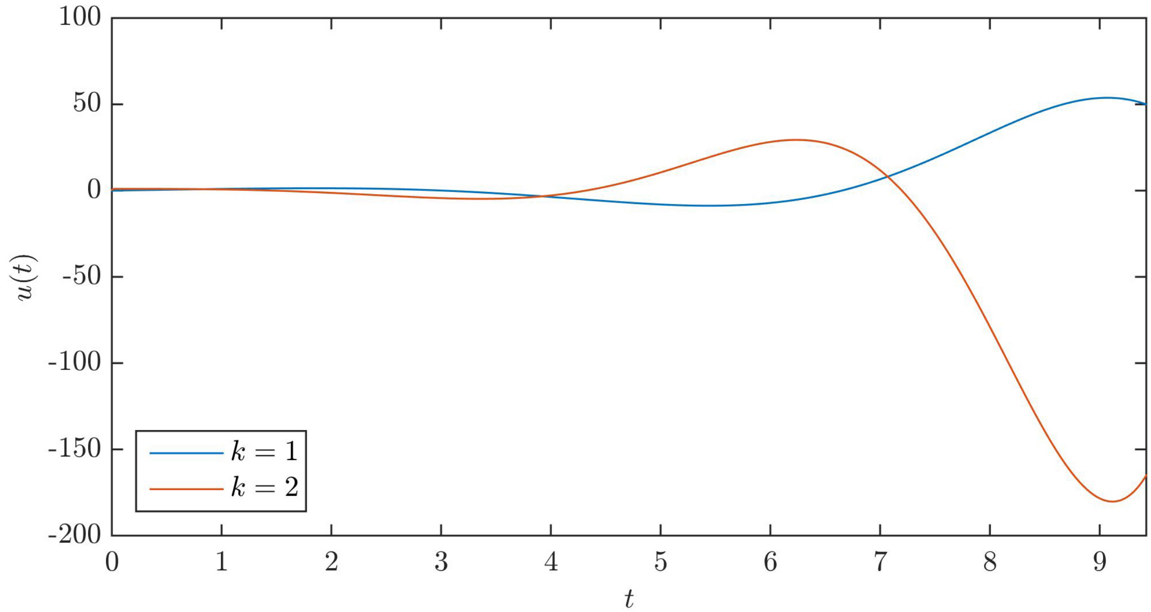
  $$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ -\beta e^{2\pi i/3}\right) = -\frac{1}{3}(-1)^k e^{2\pi i k/3} e^{-\pi i/3} \beta^{k-2} \exp\left(\frac{\beta t}{2} - i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right), \tag{710}$$

  $$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ -\beta e^{4\pi i/3}\right) = \frac{1}{3}(-1)^k e^{4\pi i k/3} e^{-2\pi i/3} \beta^{k-2} \exp\left(\frac{\beta t}{2} + i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right). \tag{711}$$

  Por tanto,

  $$\begin{aligned} u(t) = \frac{(-1)^k \beta^{k-2}}{3} H(t) \Bigg[& e^{-\beta t} + e^{4\pi i k/3} e^{-2\pi i/3} \exp\left(\frac{\beta t}{2} + i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right) \\ & - e^{2\pi i k/3} e^{-\pi i/3} \exp\left(\frac{\beta t}{2} - i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{712}$$

  para $k < 3$.



- $3 \le k \le 5$: en este caso, la situación es similar, solo que ahora tenemos el término adicional z^{k-3} que corresponde a la transformada de Laplace de $\delta^{(k-3)}$. Concentrémonos entonces en

$$R(z) = \frac{kz^{k-3}}{z^3 + k}. \tag{713}$$

Como en el caso anterior, $e^{tz}R(z)$ tiene polos simples en $z = -\beta e^{2\pi i n/3}$, $n = 0, 1, 2$. Por tanto, los residuos pueden calcularse directamente sin mayor:

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ -\beta\right) = -\frac{k}{3}(-1)^k \beta^{k-5} e^{-\beta t}, \tag{714}$$

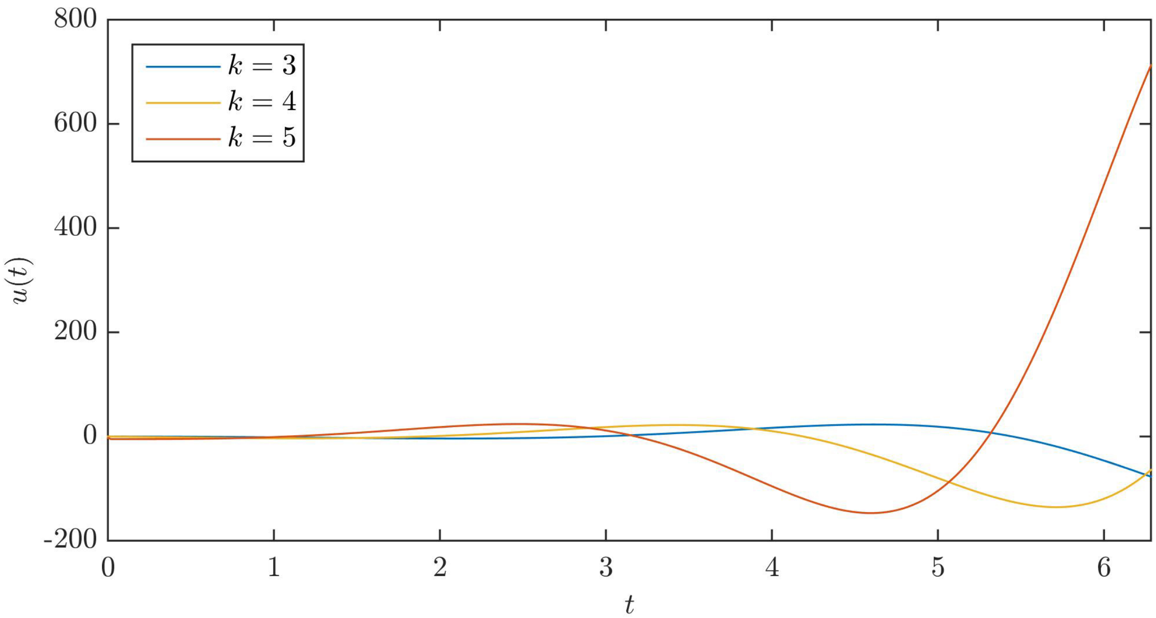
$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ -\beta e^{2\pi i/3}\right) = \frac{k}{3}(-1)^k e^{2\pi i k/3} e^{-\pi i/3} \beta^{k-5} \exp\left(\frac{\beta t}{2} - i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right), \tag{715}$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}R(z);\ -\beta e^{4\pi i/3}\right) = -\frac{k}{3}(-1)^k e^{4\pi i k/3} e^{-2\pi i/3} \beta^{k-5} \exp\left(\frac{\beta t}{2} + i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right). \tag{716}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} u(t) = \delta^{(k-3)}(t) + \frac{k(-1)^k \beta^{k-5}}{3} H(t) \Bigg[e^{-\beta t} &+ e^{4\pi i k/3} e^{-2\pi i/3} \exp\left(\frac{\beta t}{2} + i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right) \\ &- e^{2\pi i k/3} e^{-\pi i/3} \exp\left(\frac{\beta t}{2} - i\frac{\beta t\sqrt{3}}{2}\right) \Bigg], \end{aligned} \tag{717}$$

para $3 \le k \le 5$.



E.1.

Podemos hallar el propagador directamente de una ecuación en derivadas generalizadas. Sea u una función causal. Considere la ecuación del propagador,

$$(D^n+1)u=\delta. \tag{718}$$

Tomando la transformada de Laplace de ambos miembros, obtenemos

$$z^n U(z)+U(z)=1. \tag{719}$$

De aquí que U satisface,

$$U(z)=\frac{1}{z^n+1}. \tag{720}$$

Esta expresión es muy similar a algunas que hemos encontrado en ejercicios anteriores. De hecho, estaríamos tentados a decir que U tiene polos simples en

$$z=-e^{2\pi ik/n},\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1, \tag{721}$$

pero esto es falso, pues si $n=2$, entonces

$$z^2=1, \tag{722}$$

cuando en realidad necesitamos que $z^n=-1$. Sin embargo, esto puede ser resuelto fácilmente tomando

$$z=e^{\pi i/n}e^{2\pi ik/n},\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n-1. \tag{723}$$

Como todos los polos son simples, pues no hay raíces repetidas, entonces el residuo en cualquiera de las singularidades puede calcularse con generalidad. Aplicando la fórmula que mejor maneje, puede obtener que

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ e^{\pi i/n}e^{2\pi ik/n}\right)=-\frac{1}{n}e^{\pi i/n}e^{2\pi ik/n}\exp\left(te^{\pi i/n}e^{2\pi ik/n}\right). \tag{724}$$

Sin embargo, hay una mejor forma de ponerlo, pues como

$$\frac{\pi i}{n} + \frac{2\pi i k}{n} = \frac{i\pi}{n}(2k+1), \tag{725}$$

entonces tomando $m = 2k+1$, podemos reescribir a (724)

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}U(z);\ e^{\pi i m/n}\right) = -\frac{1}{n}e^{\pi i m/n}\exp\left(te^{\pi i m/n}\right), \quad m \text{ impar, con } m \leq 2n-1. \tag{726}$$

Como éste resultado es válido para cualquiera de las singularidades, entonces, y en virtud de (484), concluímos que

$$u(t) = -\frac{1}{n}H(t)\sum_{m \text{ impar}}^{2n-1} e^{\pi i m/n}\exp\left(te^{\pi i m/n}\right). \tag{727}$$